Квант

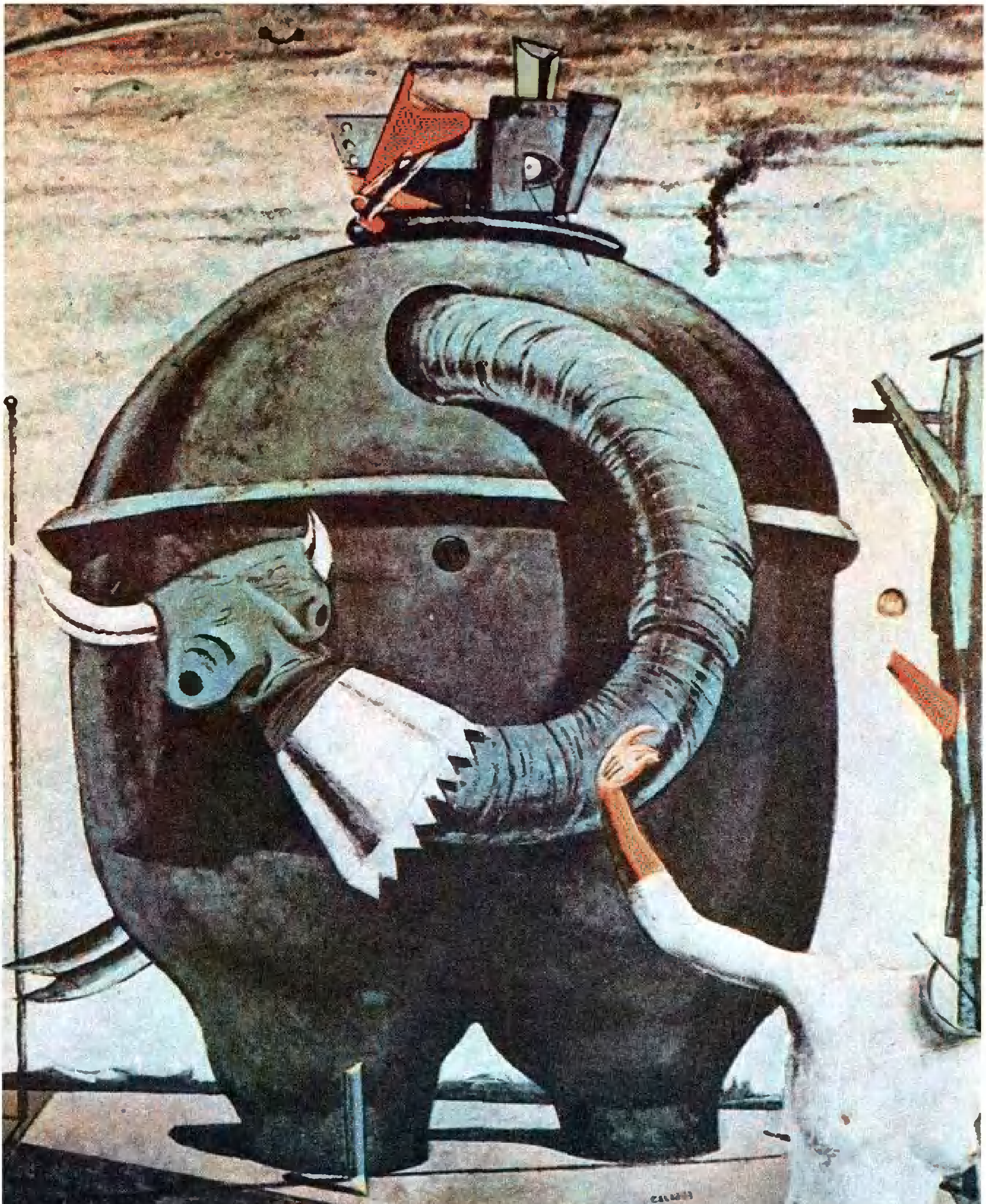
ISSN 0130-2221

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Живой компьютер?

1992



Квант 2 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Фотография культуры нейронов. О получении таких культур сегодня и о возможности их использования в электронике завтра — читайте в рубрике «Новости науки».*
2 *Фантастический металлический монстр Макса Эрнста («Grabbeigabe», 1925 г.) — символ чуждого человеческому. А для нас металлы привычны, они объект изучения специалистов (см. статью на с. 2).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Плоская складная головоломка.*

МЕТАЛЛЫ

Доктор физико-математических наук
В. ЭДЕЛЬМАН

Что такое металлы?

«Металлом называется светлое тело, которое ковать можно»,— писал в 1763 году Ломоносов. Загляните в ваш учебник химии и вы увидите, что металлы обладают характерным металлическим блеском («светлое тело»), хорошо проводят тепло и электрический ток. Правда, тут же вы прочтете, что существуют элементы, проявляющие свойства как металлов, так и неметаллов. Другими словами, нет четкой грани, отделяющей одно от другого. Химика, который интересуется, в первую очередь, химическими реакциями и для которого каждый элемент — свой особый мир, такая неоднозначность не очень смущает. А вот физика это не устраивает. Если физика делит тела на металлы и неметаллы, то нужно понять, в чем их принципиальное различие. Поэтому надо так определить, что такое металл, чтобы, как и в других случаях в области точных наук, удовлетворить двум требованиям:

1) все металлы должны обладать всеми без исключения приписываемыми им признаками;

2) иные объекты должны не обладать хотя бы одним из этих признаков.

Вооружившись этими соображениями, посмотрим, все ли металлы без исключения имеют все свойства, приписываемые им учебником. Начнем с «ковать можно», т. е. с пластичности, говоря современным языком. И тут же, по созвучию, мы вспомним пластмассы: ведь не зря они так названы, многим из них свойственна пластичность — способность необратимо изменять форму без разрушения. Конечно, медь, железо, алюминий ковать легко, со свинцом еще проще, индий — довольно редкий и дорогой металл — можно мять почти как воск (а воск ведь — не металл!), щелочные металлы и того мягче. А попробуйте стукнуть по обычному чугуну — и он разлетится на кусочки! Ну, тут металлурги скажут: это потому, что чугун — не простое вещество. Он состоит из кристаллов железа, разделенных прослойками углерода, т. е. графита. Вот по этим-то прослойкам чугун и ломается. Ну что же, все верно. Только вот беда — хрупкий графит, как оказывается, современная физика относит к металлам! Да и не один графит: числятся, например, среди металлов мышьяк, сурьма и висмут, но ковать их можно с таким же успехом, как стекло — разлетаются на мелкие кусочки!

Проделайте такой простой опыт: разбейте баллон сгоревшей лампы, достаньте оттуда вольфрамовую спираль и попробуйте ее раскрутить. Ничего не выйдет, она рассыпется в пыль! Но ведь как-то ее сумели скрутить на заводе? Значит, может быть и такое — то можно деформировать, то нельзя, в зависимости от того, что происходило с образцом в прошлом. Что ж, придется, видимо, с этим признаком — пластичностью — расстаться. Тем более, что он присущ многим неметаллам; ведь то же стекло — нагрей его, и оно станет мягким и податливым.

Итак, укорачиваем формулировку и двигаемся дальше.

На очереди — «блеск», или, говоря научным языком, оптические свойства. Блестящих предметов много: и вода, и стекло, и полированные камни, да мало ли что еще. Так что просто «блеском» не обойтись, вот и говорится: для металлов характерен *металлический* блеск. Ну, это совсем хорошо: получается, что металл — это металл. Правда, интуитивно мы

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 5 за 1981 год.

чувствуем, что металлическим блеском блестят полированные медь, золото, серебро, железо. А широко распространенный минерал пирит — разве не блестит, как металлы? Про типичные полупроводники германий и кремний и говорить не приходится, по внешнему виду их от металлов никак не отличишь. С другой стороны, не так давно научились получать хорошие кристаллы таких соединений, как двуокись молибдена; кристаллы эти коричнево-фиолетовые и на обычный металл мало похожи. Оказывается, это вещество надо считать металлом. Почему — будет ясно чуть дальше.

Так что блеск как чисто «металлический» признак отпадает.

На очереди — теплопроводность. Пожалуй, этот признак можно отбросить сразу — все без исключения тела проводят тепло. Правда, про металлы говорится, что они *хорошо* проводят тепло. Но, боюсь, на вопрос «что такое хорошо и что такое плохо?» в этом случае ни один папа не ответит.

Хорошо ли проводит тепло медь? Посмотрим в таблицу и сразу же столкнемся со встречным вопросом: а какая медь и при какой температуре? Если взять чистую медь, например ту, из которой делают провода для радиоприборов, и нагреть ее до красного каления, т. е. отжечь, то при комнатной температуре она да еще чистое серебро будут проводить тепло лучше любого другого металла. Но погните такой медный образец, стукните или зажмите в тисках — и его теплопроводность станет заметно хуже. А что произойдет, если кусочек отожженной меди начать охлаждать? Сначала теплопроводность будет расти, увеличится в десятки раз при температуре около 10 К, а потом начнет быстро падать и при достижении абсолютного нуля должна стать нулевой (рис. 1).

Возьмем теперь другой металл — висмут. Картина для него очень похожа на ту, которую мы видели для меди, только максимум теплопроводности лежит при 3 К, а при комнатной температуре висмут проводит тепло плохо, не многим лучше, чем кристалл кварца. Но кварц-то — не металл! И тот же кварц, как видно из рисунка 1, по своим теплопроводным свойствам иногда оказывается не хуже меди. А плавленный кварц, т. е. кварцевое стекло, проводит тепло плохо, примерно как нержавеющая сталь.

Кварц — не исключение. Все кристаллы хорошего качества ведут себя подобным образом, только числа будут немного различными. У алмаза, например, уже при комнатной температуре теплопроводность лучше, чем у меди.

Отбрасываем с чистым сердцем теплопроводность и жалеть об этом не будем. И не только потому, что по этому признаку металл от неметалла не так уж легко отличить, но и потому, что, оказывается, специфические черты в теплопроводности металлов (а такие есть) являются следствием его электропроводности — последнего оставшегося свойства.

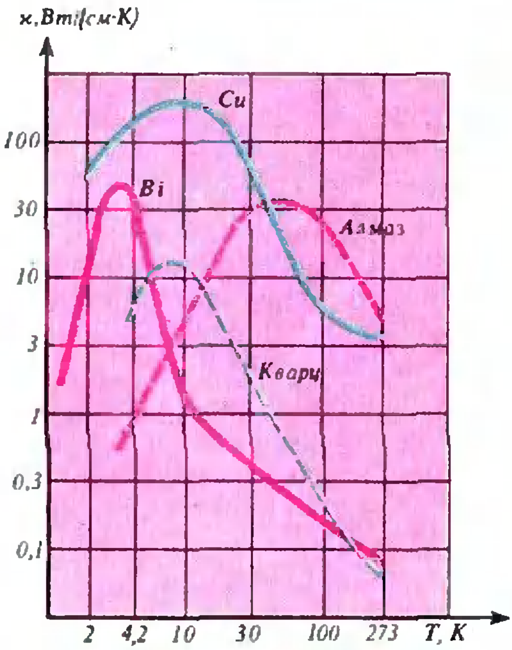


Рис. 1. Зависимость удельной теплопроводности от температуры для различных веществ. (Удельная теплопроводность — это количество теплоты, которое протекает между противоположными гранями кубика со стороной 1 см при разности температур между этими гранями 1 К в 1 с.)

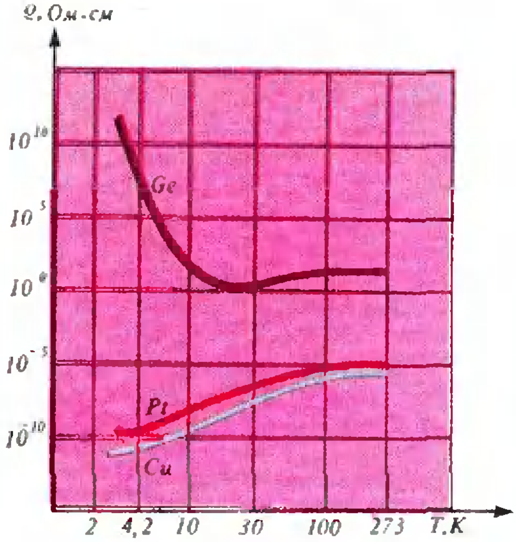


Рис. 2. Зависимость удельного сопротивления чистых металлов (меди и платины) и полупроводника (чистого германия) от температуры.

И опять в формулировке, приведенной в начале статьи, уточнение — не просто электропроводность, а *хорошая* электропроводность. А ведь когда речь шла о теплопроводности, эпитет «хорошая» нас насторожил и, как оказалось, не напрасно. Что же — и последнее свойство под подозрением? Надо обязательно его спасать, а то мы останемся вообще без металлов, а заодно без полупроводников, без изоляторов. Вот это наука получается! Любой школьник в большинстве случаев не задумываясь скажет, с чем он имеет дело, а копнули поглубже — остановились в недоумении.

И есть от чего. Возьмем таблицы физических величин и посмотрим на числа. Вот, к примеру, при комнатной температуре удельное сопротивление ϱ (Ом · см) меди $\sim 1{,}55\ 10^{-6}$; у висмута $\varrho \sim 10^{-4}$; у графита $\varrho \sim 10^{-3}$; у чистых кремния и германия $\varrho \sim 10^{2}$ (но, добавляя примеси, его можно довести до $\sim 10^{-3}$); у мрамора $\varrho = 10^{7} - 10^{11}$; у стекла $\varrho = 10^{10}$; а где-то в конце списка — янтарь с удельным сопротивлением до 10^{19}. И где же тут кончаются металлы-проводники и начинаются диэлектрики? А мы еще не упомянули про электролиты. Обычная морская вода неплохо проводит ток. Что же — и ее считать металлом?

Посмотрим, не поможет ли нам температура. Если повышать температуру, то различия между веществами начнут сглаживаться: у меди сопротивление начнет расти, у стекла, например, уменьшаться. Значит, надо проследить за тем, что произойдет при охлаждении. И вот тут мы наконец увидим качественные различия. Посмотрите на рисунок 2: при температурах жидкого гелия, вблизи абсолютного нуля, вещества разделились на две группы. У одних сопротивление остается небольшим, у сплавов или у не очень чистых металлов ϱ почти не изменяется при охлаждении, у чистых металлов сопротивление сильно уменьшается. Чем чище и совершеннее кристалл, тем значительнее это изменение. Иногда ϱ при температуре, близкой к абсолютному нулю, меньше, чем при комнатной, в сотни тысяч раз. У других веществ, например у полупроводников, с понижением температуры сопротивление начинает стремительно возрастать, и чем ниже температура, тем оно больше. Если бы можно было добраться до абсолютного нуля, то ϱ стало бы бесконечно большим. Впрочем, достаточно и того, что сопротивление реально становится столь большим, что никаким современным прибором его уже не измеришь.

Итак, мы добрались до ответа:
металлы — это такие вещества, которые проводят электричество при любой температуре.

В противоположность этому диэлектрики перестают проводить ток, если их охладить до абсолютного нуля. Если пользоваться таким определением, то и графит, и двуокись молибдена оказываются металлами. А куда же отнести полупроводники? Если речь идет о чистых, совершенных кристаллах, то они, строго говоря, диэлектрики. Но если в них содержится много примесей, то они могут стать металлами, т. е. сохранять проводимость при самых низких температурах.

Что же у нас осталось в конце концов? Нам удалось выявить *единственный* существенный признак, руководствуясь которым мы можем, если не в повседневной практике, то хотя бы в принципе, всегда отличить металл от неметалла. А раз этот признак единственный, то оказываются автоматически удовлетворенными оба условия, выполнения которых мы потребовали в начале статьи.

Почему металлы проводят ток?

Уже давно было замечено, что одни элементы, такие как медь, золото, серебро, железо, свинец, олово, и в чистом виде, и при сплавлении друг с другом образуют металлы. Другие, например фосфор, сера, хлор, азот, кислород, не только сами металлами не являются, но и соединяясь с металлами превращают их в диэлектрики. Пример тому — обыкновенная соль NaCl. Поэтому в химии появилось деление элементов на металлы и неметаллы.

Такая классификация, однако, не более чем констатация фактов, хотя на первый взгляд она претендует на то, чтобы объяснить свойства веществ исходя только из строения атомов. В самом деле, посмотрим на таблицу Менделеева. Элементы, расположенные в одном столбце, очень похожи по своим химическим свойствам. А вот будут ли изготовленные из них кристаллы или сплавы проводить электрический ток? Глядя на таблицу, ответить на этот вопрос нельзя. Так, все элементы первой группы — металлы, за исключением первого — водорода. Но ведь закон, который кому-то разрешено нарушать,— уже не закон. Правда, во второй группе дело обстоит лучше: здесь все элементы — привычные металлы; а в третьей группе опять сбой: бор — полупроводник, а алюминий — прекрасный металл. Дальше еще хуже. Первый элемент четвертой группы — углерод; мы уже упоминали, что графит, так называют кристалл углерода,— это металл. А вот алмаз — тоже кристалл, составленный из атомов углерода, но расположенных иначе, чем в графите,— изолятор. Кремний и германий — классические полупроводники. Олово — казалось бы, типичный металл. Однако... Если всем знакомое белое блестящее олово долго подержать при температуре −30 °С, то его кристаллическая структура изменится, а внешне оно посереет. И это олово — его так и называют «серое олово» — полупроводник! А свинец всегда металл.

Если начинать смешивать разные элементы, то картина совсем усложнится. Возьмем, например, и сплавим два металла индий и сурьму — в пропорции один к одному. Получим широко применяемый в технике полупроводник InSb. С другой стороны, мы уже говорили, что двуокись молибдена MoO_2 при $T\approx 0$ К проводит ток, т. е. MoO_2 — металл. (И WO_2, и Re_2O_3 и некоторые другие оксиды — тоже металлы.) А если получающиеся из атомов кристаллы сильно сжать, сдавить, то, оказывается, чуть ли не все вещества становятся металлами, даже такие типичные металлоиды, как сера. Правда, для нее давление перехода в металлическое состояние очень велико — несколько сотен тысяч атмосфер (а для водорода еще больше).

Похоже, что разделить элементы на металлы и неметаллы — не такая уж простая задача. Во всяком случае, ясно, что, рассматривая отдельные атомы, мы не можем сказать, будет ли вещество, составленное из этих атомов, проводить ток при $T\approx 0$ К, потому что огромную роль играет то, как расположены атомы друг относительно друга. Поэтому для ответа на вопрос «почему металлы проводят ток?» надо изучать, как атомы взаимодействуют между собой, образуя твердое тело.

Посмотрим, как обстоит дело с простейшим из металлов — литием. Порядковый номер Li — три. Это означает, что ядро атома Li содержит три протона и положительный заряд ядра компенсируют три электрона. Два из них образуют заполненную *s*-оболочку, ближайшую к ядру, и сильно связаны с ядром. Оставшийся электрон расположен на второй s-оболочке. На ней мог бы поместиться еще один электрон, но его у лития нет. Все остальные разрешенные состояния энергии свободны, и электроны на них попадают только при возбуждении атома (например, при сильном нагреве паров лития). Схема уровней в атоме лития показана на рисунке 3.

Рассмотрим теперь множество атомов лития, находящихся в ограниченном объеме. Они могут образовывать газ (пар), жидкость или твердое тело. При достаточно низкой температуре силы взаимного притяжения препятствуют тепловому движению атомов, образуется кристалл. Это наверняка происходит при абсолютном нуле температуры, когда все известные вещества, кроме гелия,— кристаллы.

Итак, из опыта известно, что при низких температурах твердое тело — устойчивое состояние для лития. Но, как известно, устойчивым всегда является такое состояние вещества, в котором его внутренняя энергия меньше, чем в других возможных агрегатных состояниях при той же температуре. Суммарное уменьшение энергии при переходе из одного состояния в другое легко измерить — ведь это и есть теплота испарения или плавления.

С микроскопической точки зрения при низких температурах внутренняя энергия вещества есть, в первую очередь, сумма энергий электронов атомов, составляющих тело. Но электроны в атомах занимают строго определенные уровни энергии. Значит, мы можем ожидать, что при сближении атомов изменятся уровни энергии. При этом распределение электронов по уровням должно оказаться таким, чтобы их суммарная энергия была меньше, чем сумма энергий электронов в таком же количестве изолированных друг от друга атомов.

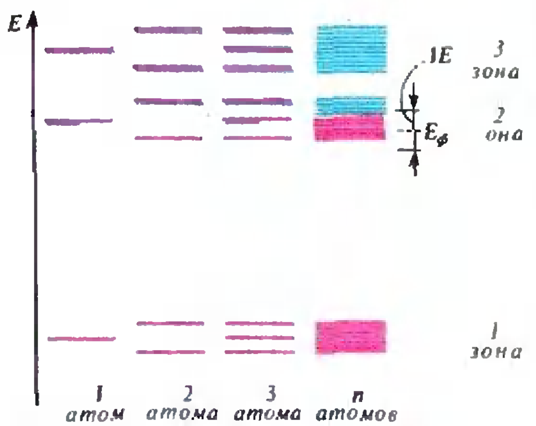


Рис. 3. Схема уровней энергии атома лития и их трансформации в зоны при объединении атомов в кристалл. Красным цветом обозначены занятые состояния.

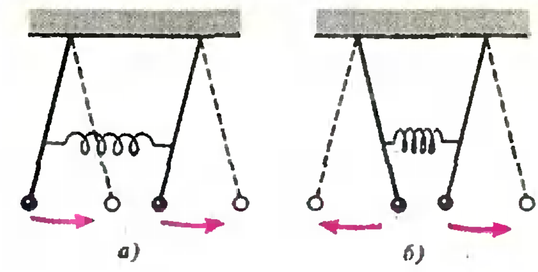


Рис. 4. Колебания связанных маятников.

Что произойдет с уровнями, можно понять исходя из аналогии движения электрона в атоме с любой колебательной системой, например с маятником. Пусть у нас есть два совершенно одинаковых маятника. Пока они не взаимодействуют друг с другом, частота колебаний обоих маятников одна и та же. Введем теперь взаимодействие между ними — свяжем их, например, мягкой пружинкой. И сразу же вместо одной частоты появятся две. Посмотрите на рисунок 4: связанные маятники могут колебаться синфазно, а могут навстречу друг другу. Очевидно, в последнем случае их движение будет более быстрым, т. е. частота колебаний такой системы выше собственной частоты колебаний одного маятника. Таким образом, связь приводит к расщеплению частот. Если связать три маятника, то станет уже три собственных частоты, у системы из четырех связанных маятников четыре собственные частоты и так далее до бесконечности.

Поведение любой другой колебательной системы подобно. Если мы заменим маятники, например, на электрические колебательные контуры, то, как хорошо знают радиолюбители, при введении связи между ними их собственные частоты также расщепляются. Электроны в атоме — это тоже своеобразная колебательная система. Как и маятник, электроны имеют массу, есть сила Кулона, возвращающая их к положению равновесия, и этим определяется движение электронов в атоме, характеризуемое, согласно квантовой механике, собственной частотой. Для электронов включение взаимодействия при взаимном сближении приводит к тому, что частоты, бывшие до того одинаковыми, становятся немного разными.

В квантовой механике имеется прямая связь между энергией и частотой колебаний, выражаемая формулой $E=h\nu$, где $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, а ν — частота колебаний. Поэтому надо ожидать, что при сближении двух атомов лития каждый из уровней, показанных на рисунке 3, расщепится на два. Каждому новому уровню энергии будет соответствовать своя электронная оболочка теперь уже не отдельного атома, а «молекулы». Оболочки заполняются электронами по тому же правилу, что и у атома,— по два электрона на оболочку. Та пара оболочек, которая получилась из самого нижнего уровня, будет полностью заполнена электронами. Действительно, на них можно разместить четыре электрона, а их у двух атомов лития — шесть. Остаются два электрона, которые теперь расположатся на нижнем из уровней второй пары. Заметьте, какой произошел качественный скачок: раньше эти два электрона занимали два из четырех состояний, имеющих одинаковую энергию. Теперь у них появилась возможность выбирать, и они расположились так, чтобы их суммарная энергия была поменьше. Нетрудно сообразить, что произойдет при добавлении следующих атомов: для трех атомов каждый исходный уровень расщепится на три (см. рис. 3). Девять электронов расположатся так: шесть на нижней триаде уровней, возникших из уровня ближайшей к ядру внутренней заполненной оболочки атома; еще два электрона — на нижнем уровне следующей триады; оставшийся электрон — на среднем уровне той же триады. Еще одно место на этом уровне остается свободным, а верхний уровень полностью пуст. Если взять n атомов ($n\gg1$), то каждый уровень расщепится на n тесно расположенных уровней, образующих, как говорят, полосу или зону разрешенных значений энергии. В нижней полосе все состояния заняты, а во второй — только половина, и именно те, энергия которых ниже. Следующая полоса — полностью пустая.

Расстояние между соседними уровнями в зоне легко оценить. Естественно считать, что при сближении атомов изменение энергии электронов атома примерно равно теплоте испарения вещества, пересчитанной на один атом. Она составляет для металлов обычно несколько электронвольт, а значит, и полная ширина зон ΔE, определяемая взаимодействием соседних атомов, должна иметь тот же масштаб, т. е. $\Delta E\sim1$ эВ$\approx10^{-19}$ Дж. Для расстояния между уровнями получим $\delta E\sim\Delta E/n$, где n — число атомов в образце. Это число чрезвычайно велико: межатомное расстояние составляет всего несколько ангстремов, и объем, приходящийся на один атом, оказывается всего $\sim10^{-22}$ см^3. Если наш образец имеет, для определенности, объем 1 см^3, то для него $n\approx10^{22}$. Поэтому численно оказывается $\delta E\approx\approx10^{-22}\cdot\Delta E\approx10^{-41}$ Дж. Эта величина столь мала, что всегда можно пренебречь квантованием энергии внутри зоны и считать, что в пределах зоны разрешены любые значения энергии.

Итак, в кристалле уровни энергии размываются в зоны, имеющие ширину, сравнимую с расстоянием между ними. Разрешенными для электронов являются состояния внутри зоны, и здесь электроны могут иметь практически любую энергию (разумеется, в пределах ширины зоны). Но очень важно, что число мест в каждой зоне строго ограничено и равно удвоенному числу атомов, составляющих кристалл. И это обстоятельство, совместно с принципом минимума энергии, определяет распределение электронов по зонам.

Теперь у нас все готово, чтобы наконец понять, почему литий проводит ток. Взглянем опять на рисунок 3. Что же получилось? Пока атомы были сами по себе, все электроны находились во вполне определенных состояниях, строго одинаковых для всех атомов. Теперь атомы объединились в кристалл. Сами атомы в кристалле не только одинаковы, но и совершенно одинаково расположены относительно соседей (за исключением, конечно, тех, которые попали на поверхность кристалла). А все электроны имеют теперь разные энергии. Это может быть только в том случае, если электроны больше не принадлежат отдельным атомам, а каждый электрон «поделили» между собой все атомы. Другими словами, электроны свободно передвигаются внутри идеального кристалла, образуя как бы жидкость, которая заполняет весь объем образца. И электрический ток — это направленный поток этой жидкости, аналогичный текущей по трубам воде.

Чтобы заставить воду течь по трубе, надо создать разность давлений у концов трубы. Тогда под действием внешних сил молекулы приобретут направленную скорость — вода потечет. Очень важно здесь появление именно направленной скорости, ведь сами по себе молекулы хаотически движутся с громадными скоростями — при комнатной температуре средняя скорость теплового движения молекулы порядка 10^3 м/с. Так что дополнительная энергия, приобретаемая молекулой в потоке, мала по сравнению с энергией теплового движения.

Дополнительная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он участвовал в общем направленном движении электронов в кристалле (а это и есть ток), также мала по сравнению с собственной энергией электрона. В этом нетрудно убедиться. Мы уже говорили, что энергия электрона по порядку величины равна 1 эВ$=1{,}6\times\times10^{-19}$ Дж. Если вспомнить, что для свободного электрона $E=mv^2/2$ и $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, то легко найти скорость: $v\sim10^6$ м/с. Предположим, что все электроны участвуют в токе, а их в 1 м^3 проводника $n\sim10^{28}\,Z$ (Z — заряд ядра). Тогда в проводе с поперечным сечением $S=10^{-6}$ м^2 при токе $I\approx10$ А (при большем токе провод расплавится) направленная скорость электронов равна $v_н=I/neS\approx10^{-2}$—10^{-3} м/с. Значит, энергия электрона, участвующего в токе, больше энергии E свободного электрона всего на $10^{-8}\,E$, т. е. на $1{,}6\cdot10^{-27}$ Дж.

И тут мы сталкиваемся с удивительным фактом: оказывается, электроны, которые расположены в нижней зоне, называемой обычно валентной, не могут изменить свою энергию на малую величину. Ведь если какой-то электрон увеличит свою энергию, то это значит, что он должен перейти на другой уровень, а все соседние уровни в валентной зоне уже заняты. Свободные места есть только в следующей зоне. Но чтобы туда попасть, электрон должен изменить свою энергию сразу на несколько электронвольт. Вот так и сидят электроны в валентной зоне и ждут журавля в небе — энергичного кванта. А кванты нужной энергии бывают у видимого или ультрафиолетового света.

Итак, жидкость есть, а течь она не может. И если бы у лития было всего два электрона в атоме, т. е. если бы мы строили картинку для атомов лития, то получили бы мы изолятор. Но твердый гелий — действительно изолятор, так что мы можем уже поздравить себя с некоторым успехом: мы еще не объяснили, почему в металлах может течь ток, зато поняли, почему диэлектрики, где электронов полным-полно и все они «размазаны» по всему кристаллу, не проводят ток.

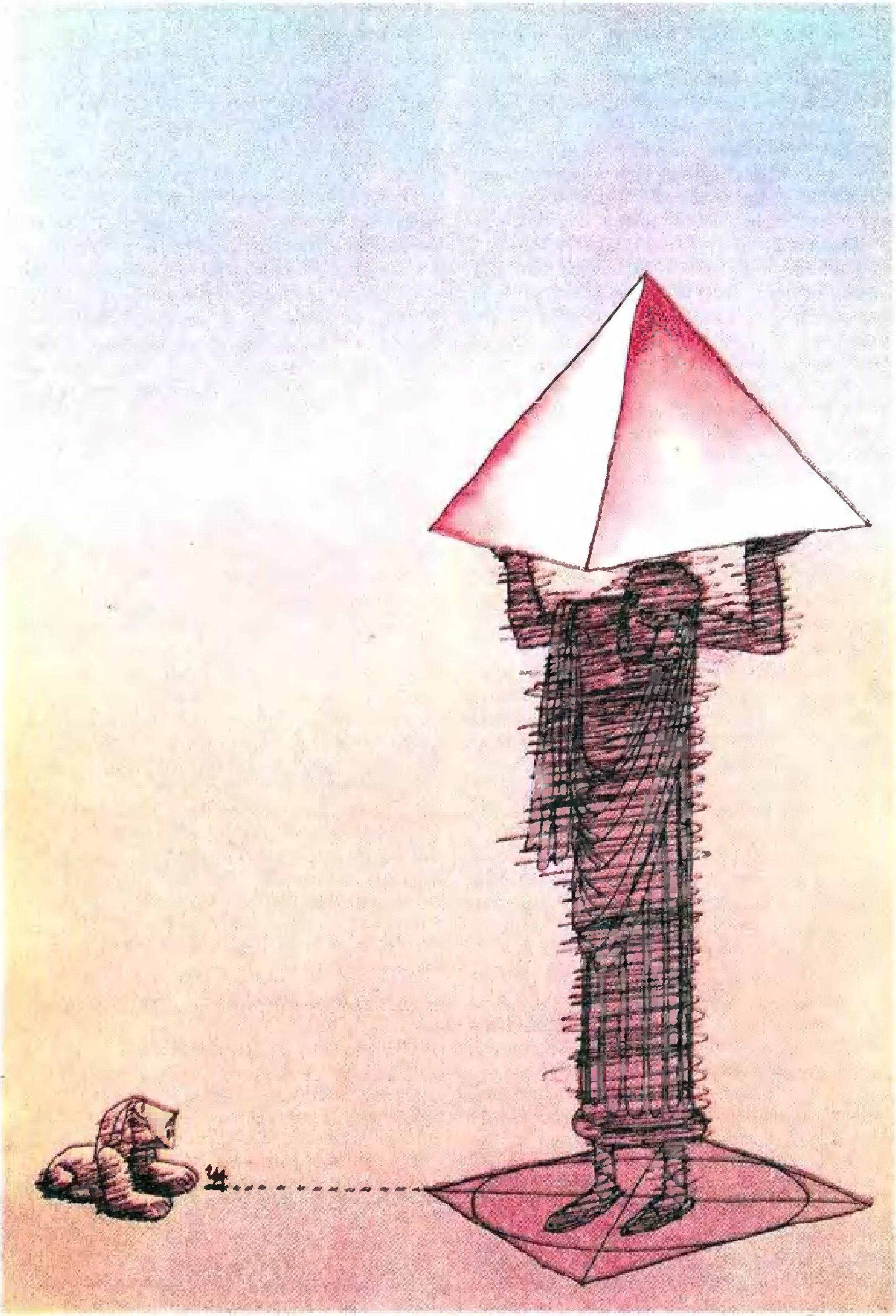
А что же литий? Да ведь у него есть вторая зона, которая заполнена только наполовину. Энергию, разделяющую занятые и свободные уровни внутри этой зоны, называют энергией Ферми $E_ф$. Как мы уже говорили, разность энергий между уровнями в зоне очень невелика. Электрону, который расположен в зоне возле уровня Ферми, достаточно чуть-чуть увеличить свою энергию — и он на свободе, там, где состояния не заняты. Электронам из приграничной полосы ничто не мешает увеличить энергию под действием электрического поля и приобрести направленную скорость. А ведь это и есть ток! Но так же легко этим электронам и потерять направленную скорость, столкнувшись с атомами-примесями (которые всегда есть) или с другими нарушениями идеальной структуры кристалла. Этим объясняется сопротивление току.

Кажется, ясно, почему гелий — изолятор, а литий — проводник. Попробуем-ка наши представления применить к следующему элементу — бериллию. И тут — осечка, модель не сработала. У бериллия — четыре электрона, и, казалось бы, должны быть полностью заняты первая и вторая зоны, а третья обязана быть пустой. Получается изолятор, в то время как бериллий — металл.

Дело вот в чем. Если ширина зон достаточно велика, то они могут налезть друг на друга. Про такое явление говорят, что зоны перекрываются. У бериллия так и происходит: минимальная энергия электронов в третьей зоне меньше, чем максимальная во второй. Поэтому электронам оказывается энергетически выгодно оставить пустой часть второй зоны и занять состояния внизу третьей. Вот и получается металл.

А что будет с другими элементами? Перекрываются зоны или нет, заранее сказать нельзя, для этого нужны громоздкие расчеты на ЭВМ, и то не всегда можно получить достоверный ответ. Но вот что примечательно: из нашей схемы следует, что если брать элементы с нечетным числом электронов, то всегда должен получаться металл, если только структурной единицей в кристалле является отдельный атом. А вот водород, например, азот и фтор не желают кристаллизоваться в такую решетку. Они предпочитают сначала объединиться попарно, а уже молекулы, содержащие по четному числу электронов, выстраиваются в кристалл. И законы квантовой механики не мешают ему быть диэлектриком.

Итак, мы теперь знаем, что такое металл с точки зрения физики, и разобрались в самой сути явления, поняв, почему в принципе существуют изоляторы и проводники. Мы увидели, что нельзя предложить простой способ объяснения, почему какое-то конкретное вещество оказалось диэлектриком или металлом. Сделать это можно, лишь вооружившись всей мощью аппарата современной квантовой механики и вычислительной техники, но это уже задача специалистов.



КАК НАЧИНАЛАСЬ ГЕОМЕТРИЯ

Доктор физико-математических наук
В. СМИЛГА

Истинное начало этой истории теряется во мгле времен.

Где, как и когда начиналась геометрия?.. Где, как и когда обрела она законченную форму и заслужила право называться наукой?.. Кто был тот неведомый, первый, предложивший аксиоматическое ее построение? Не знаем и, вероятно, не узнаем.

Принято думать, что это сделали греки. Быть может, прославленные египетские жрецы или не менее прославленные халдейские маги суть истинные отцы этой науки. Но они не озаботились тем, чтобы оставить для потомков труды, подтверждающие их приоритет.

Как бы то ни было, в седьмом веке до нашей эры геометрия приходит в Грецию. И здесь греки, поклонники холодной логики и филигранного изящества чистого интеллекта, любовно оттачивают (или, быть может, создают?) одно из самых красивых и долговечных творений человеческой мысли — науку геометрию.

Тогда-то и начинается азартная и драматическая игра в чистую логику, затянувшаяся вот уже на два с половиной тысячелетия...

Фалес

Предполагают, что геометрию начинала Ионийская школа, а точнее, сам ее основатель — Фалес Милетский, проживший что-то около сотни лет (640—540 или 546 годы до нашей эры).

Толком мы мало что знаем о нем.

Точно известно, что имел он титул одного из семи мудрецов Греции, что по официальному счету идет как первый философ, первый математик, первый астроном и вообще первый по всем наукам в Греции. По-видимому, он был тем же для Греции, что Ломоносов для России. В молодости Фалес попал в Египет, куда фараон Псамметих только-только начал допускать иностранцев. Вероятно, он оказался там по торговым делам — известно, что свою карьеру Фалес начинал купцом.

В Египте Фалес застрял на много лет, изучая науки в Фивах и Мемфисе. Потом он вернулся домой и основал философскую школу, выступая, очевидно, не столько как самостоятельный мыслитель, сколько как популяризатор египетской мудрости.

Считается, что геометрию и астрономию привез именно он.

Что именно сделал он в геометрии, мы можем только гадать, хотя греческие авторы приписывали ему довольно много.

Например, Прокл Диддох утверждает, что Фалес доказал теоремы о равенстве вертикальных углов, о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о том, что диаметр делит круг пополам и еще ряд других.

Допустив даже, что все историки писали сущую истину, мы не можем сказать, самостоятельно ли Фалес пришел к этим теоремам или просто пересказал идеи египтян.

По-видимому, единственный бесспорный факт из его научной деятельности — предсказание солнечного затмения 585 года до нашей эры. Но легенд о Фалесе ходило множество, и это само по себе доказывает, что ученый он был крупный.

Во всяком случае, одному у него

могут поучиться все философы: краткости. Полное собрание его сочинений (разумеется, до нас не дошедшее) по преданию составляло всего 200 стихов.

Пифагор

Ученики и последователи Фалеса уделяли немало внимания геометрии в своих ученых занятиях. Однако центральной математической школой в VI—V веках до нашей эры была, несомненно, Пифагорейская.

Биографические сведения о Пифагоре в основном сводятся к нескольким анекдотам. В этом он очень походит на Фалеса Милетского. Неясности начинаются уже с вопроса о его происхождении. Бертран Рассел, суммируя имеющиеся данные, заключает: «Некоторые говорят, что он был сыном состоятельного гражданина по имени Мнесар, другие же считают, что он был сыном бога Аполлона. Я предоставляю читателю выбирать между двумя этими противоположными версиями».

Полагают, что жил Пифагор столь же основательно, что и Фалес,— около ста лет (предположительно 560—470 или 580—500 годы до нашей эры, что для нас почти одно и то же). Опять же, как и Фалес, он лет двадцать набирался мудрости в Египте; затем (и в этом он Фалеса превзошел) еще лет десять жил в Вавилоне, где тоже поднакопил знаний. Утверждают также, что он путешествовал по Индии, но этому никто не верит.

В каждой второй брошюре о боксе можно прочитать, что Пифагор был олимпийским чемпионом по кулачному бою, хотя первоисточник столь любопытных данных никогда не указывается (по крайней мере мне он не известен). Приятно, впрочем, сознавать, что философ и математик может оказаться боксером экстра-класса.

Но если насчет боксерских данных Пифагора и есть некоторые сомнения, то о его активном, хотя и не очень удачном, вмешательстве в политику мы знаем наверняка. Известно, например, что граждане сицилийского города Кротона, где он основал по возвращении из дальних стран свою школу и попутно втравил весь город в тяжелую междоусобную войну, в итоге попросили его убраться вместе со школой. Это он и сделал, и довольно поспешно, что было разумно и своевременно.

Особых восторгов как личность Пифагор не вызывает, хотя, несомненно, ученым он был очень сильным. Его Пифагорейский орден философов и математиков слишком уж напоминает казарму, а сам основатель и глава подозрительно смахивает на какого-то фюрера, хотя и несравненно более культурного, чем те, что имели успех в двадцатом столетии.

Это нам Пифагор представляется в основном математиком. Сам же он, как и его современники, полагал, что истинная его профессия — пророк. А как известно, каждый пророк обязан отчасти быть фокусником, отчасти демагогом, отчасти шарлатаном. Всем этим Пифагор, видимо, владел в полном ассортименте. А ученики, стараясь по мере сил, распространяли в массах доказательства богоизбранности учителя. Рассказывали, что у него было золотое бедро; рассказывали, что достойные люди видели его одновременно в двух разных местах; рассказывали также, что когда однажды он переходил вброд реку, последняя от восторга вышла из берегов, радостно восклицая: «Да здравствует Пифагор!». (На мой взгляд, речной бог выбрал не лучший способ прославления, ибо в первую очередь Пифагор должен был изрядно вымокнуть. Но так передавали эту историю ученики.)

Говорят также, что он читал проповеди скотам, поскольку мало различал их и людей.

Именно сам Пифагор — очевидно, для пущего авторитета — распространял, популяризировал, холил и лелеял идею, что его родитель не кто иной, как светоносный и лучезарный Аполлон (задав тем самым немало лишней работы своим биографам).

Кроме того, Пифагор оказался истинным отцом популярного и ныне обычая — присваивать научные результаты своих учеников. Причем дело было поставлено вполне официально: существовал декрет, по которому авторство всех математических работ школы приписывалось Пифагору. Хотя подобные вещи не такая уж редкость и в наши дни, все же двадцать пять столетий несколько смягчили и облагородили нравы. Великий же Пифагор вообще вне конкуренции на этой стезе. Он исхитрился устроить так, что верные ученики объявляли его автором работ, выполненых намного позже его кончины.

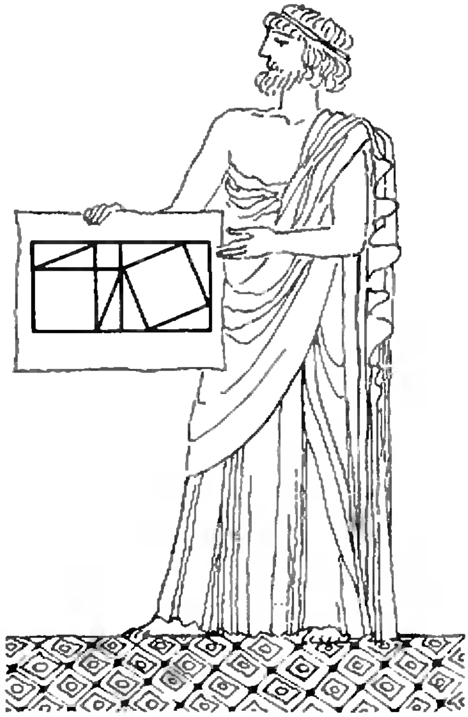
Понятно, что при таких порядках наиболее безусловным и безоговорочным научным доводом в Пифагорейской школе считалась ссылка на «самого». Так и говорили на хорошем древнегреческом языке: «Сам сказал». После чего дискуссия была неуместна и даже несколько опасна.

Далее, решения математических задач тщательно засекречивались. Были и другие «табу», сведенные в подробный список, слегка напоминающий творчество сумасшедшего руководителя детского сада. Опасаясь показаться голословным, я процитирую часть правил хорошего тона для джентльменов из Пифагорейского клуба. Вот они:

1. Воздерживайся от употребления в пищу бобов.
2. Не поднимай то, что упало.
3. Не прикасайся к белому петуху.
4. Не откусывай от целой булки.
5. Не ходи по большой дороге.
6. Вынимая горшок из огня, не оставляй следа его на золе, но помешай золу.

И так далее, все в том же духе.

И эта компания время от времени захватывала власть то в одном, то в другом греческом городе, устанавливая там культ Пифагора и, соответственно, требуя выполнения своего устава. Правда, как меланхолически замечает Бертран Рассел, «те, которые не были возрождены новой верой, жаждали бобов и рано или поздно восставали».



Как уже было сказано, накопленные знания пифагорейцы тщательно скрывали. И, кто знает, может быть, геометрия осталась бы неизвестной всему человечеству до самых наших дней, если бы не оплошность одного из рядовых членов Пифагорейской школы. Вот как пифагорейцы объясняли, почему геометрия стала открыто распространяться. Это произошло по вине одного из них, который потерял деньги общины. После этого несчастья община позволила ему зарабатывать деньги, преподавая геометрию,— и геометрия получила название «Предание Пифагора».

Любопытно, что, судя по всему, существовал учебник геометрии с таким названием.

Что же касается истории с деньгами, если в ней есть зерно истины, я, хотя не считаю себя злорадным человеком, был бы счастлив узнать, что наш пифагореец отнюдь не потерял деньги, а прокутил их в ближайшем портовом кабачке, потягивая вино, наслаждаясь похлебкой из белого петуха с бобовой приправой, с удовольствием кусая от целой булки и распевая затем негармоничные песни на большой дороге.

На этом мы и расстанемся с Пифагором. Нам предстоит отметить великие заслуги перед геометрией еще одного малоприятного, на мой вкус, человека.

Платон

Платон, живший в 428—348 годах до нашей эры, считается, и, должно быть, справедливо — я не специалист — одним из величайших философов Греции.

Геометрия ко времени Платона уже была очень развита. Было решено много весьма и весьма сложных задач, доказаны сложнейшие теоремы. Но ясной позиции во взглядах на общую схему построения науки еще не было. Развитие геометрии, как нередко бывает в науке, стимулировалось задачами, решения которых никак не удавалось отыскать. Требовалось при помощи циркуля и линейки, не привлекая никаких других геометрических инструментов:

— разделить данный угол на три равных части (трисекция угла);

— построить квадрат с площадью, равной площади данного круга (квадратура круга);

— построить куб с объемом, в два раза бóльшим объема данного куба (делосская задача).

Только в конце прошлого века было доказано, что в такой постановке ни одна из этих задач не может быть решена, хотя, если использовать другие геометрические инструменты или (что то же) использовать при построении геометрические места точек, отличные от прямой либо дуги окружности, то все три задачи легко решаются.

Однако принятые у греков правила игры не позволяли пользоваться при решении задач ничем, кроме циркуля и линейки. Платон даже обосновал это ссылкой на авторитет богов.

Так что ни одна из проблем решена не была, но по ходу дела геометрия была основательно разработана.

Я с великим сожалением опускаю все анекдоты, связанные с этими задачами. Историй много, и все они прелестны, но нельзя слишком отвлекаться. Вспомню лишь одно из преданий, связанное именно с Платоном и показывающее его с лучшей стороны.

Однажды, рассказывает Эратосфен, на острове Делосе вспыхнула эпидемия чумы. Жители острова, естественно, обратились к Дельфийскому оракулу, который повелел удвоить объем золотого кубического жертвенника Аполлону, не изменяя его формы. За советом обратились к Платону. Платон задачи не решил, но зато истолковал оракул в том смысле, что боги гневаются на греков за нескончаемые междоусобные войны и желают, чтобы они, греки, вместо кровавых побоищ занимались бы науками и особенно геометрией. Тогда чума исчезнет.

Платон очень много сделал для развития математики и весьма ценил ее. На входе в его академию был даже высечен весьма категорический лозунг: «Да не войдет сюда тот, кто не знает геометрии». Дело в том, что Платон полагал: «Изучение геометрии приближает к бессмертным богам» — и воспитывал в этом духе своих учеников, приплетая математику к месту и не к месту.

По-видимому, Платон первый четко потребовал: математика вообще и геометрия в частности должны быть построены дедуктивным образом. Иначе говоря, все утверждения (теоремы) должны строго логически выводиться из небольшого числа основных положений — аксиом. Такая постановка — крупнейший шаг вперед.

Некоторые из учеников Платона выросли в блестящих геометров. Но надо сказать, что и по своим взглядам, и по методам организации школы, и по любви к саморекламе Платон очень напоминает Пифагора.

На мой взгляд, как философ и как человек, Платон довольно несимпатичен. Во всяком случае, созданная им теория идеального государства, образцом которого послужила реальная и вполне фашистская страна — Спарта — восторга, мягко говоря, не вызывает. Основные положения его утопии в общем удовлетворяют требованиям нацистов. Всю свою жизнь он яростно боролся против демократии в политической жизни и против материализма в духовной. Философов-материалистов Платон не только абстрактно поносил в своих философских сочинениях, но, демонстрируя неплохую практическую хватку, нередко дискутировал, как сказали бы теперь, «в жанре политического доноса».

Приведу пример. Был в те времена в Греции замечательный философ, один из первых материалистов — Анаксагор. (Мы почти ничего не знаем о его геометрических работах; известно, однако, что в темнице, где ему пришлось сидеть за свои взгляды, он исследовал проблему квадратуры круга.)

И вот Платон в одном из сочинений — в диалоге жителя Афин (рупор самого Платона) и спартанца — так расправляется с Анаксагором.

Афинянин: «Когда мы, стремясь получить доказательства существования богов, ссылаемся на Солнце, Луну, Звезды и Землю как на божественные существа, то ученики этих новых мудрецов возражают нам, что все это ведь только земля и камни, и они (т. е. камни) совершенно не в состоянии заботиться о людских делах.»

Спартанец молниеносно чует ересь и возмущенно восклицает: «Какой же вред для семьи и государства проистекает от таких настроений у молодежи!»

Так дискутировал Платон.

Евклид

К IV—III векам до нашей эры геометрия вполне оформилась как наука. Были устоявшиеся традиции, детально разработанные методы решения задач, крупные достижения, было уже несколько учебников и различные научные школы.

Рассказать обо всех геометрах доевклидового периода — а список математиков того времени включает несколько десятков славных имен — и об их работах, естественно, невозможно. И поскольку у нас не многотомный исторический труд, а небольшая статья, оставим предтеч и перейдем непосредственно к Евклиду.

Жил и работал он во время весьма любопытное.

В 323 году до нашей эры то ли вследствие острой лихорадки, то ли в результате неумеренного пьянства или просто от доброй порции яда отправился на свидание к отцу своему Зевсу царь царей земных, изрядно уже потрепанный жизнью, хотя сравнительно молодой, тридцатитрехлетний мужчина — Александр Македонский.

Полубога подобающим образом проводили и перешли к текущим делам. А дел хватало: надо было делить империю. Размеры ее были невероятны. Всего лишь за десять лет оказались завоеванными страны, в сотни раз превосходившие маленькую полунищую Македонию.

Границы известного мира расширились во много раз, и теперь предстояло переварить проглоченное. Было ясно, что для одного такое наследство непомерно, и отдавать все малолетнему брату Александра или же второму наследнику — сыну, появившемуся на свет через несколько месяцев после смерти отца, было просто смешно. Посему империю полюбовно растащили те полководцы, которых Александр не успел казнить. Они поклялись в вечной дружбе, заключили вечный мир, порядком выпили на радостях, обменялись суровыми мужскими пожатиями на прощанье — и, естественно, началась междоусобная резня.

Более других в этой сваре повезло осмотрительному Птолемею, который при дележке отхватил себе Египет. Наследники его постепенно ассимилировались, а династия оказалась не только самой прочной и долговечной, но и прославилась тем, что дала истории Клеопатру.

И самый первый Птолемей, и все последующие Птолемеи славны тем, что были покровителями наук. Какие у них на то были мотивы, трудно сейчас разобраться, но факты таковы: в III—II веках до нашей эры Александрия превратилась в основной научный центр эллинистического мира. И наиглавнейшим научным институтом был знаменитый Александрийский музей с Александрийской библиотекой. Сюда-то и пригласил Птолемей Евклида, и именно здесь Евклид написал «Начала» — книгу, в истории человечества бесспорно уникальную.

Снова я должен сделать традиционное уже признание: о самом Евклиде практически ничего не известно.

Легенды, конечно же, имеются. Рассказывают, например, что Птолемей поначалу сам захотел одолеть премудрости геометрии, но довольно скоро обнаружил, что изучение математики требует некоторых усилий. Тогда он призвал Евклида и вопросил его, полагаю, как джентльмен джентльмена, нельзя ли постигнуть все тайны науки как-нибудь попроще? На что Евклид ответил: «В геометрии нет царского пути». Остается неведомым, продолжал ли после этого царь занятия математикой (вероятнее всего, он утешился в занятиях, более приличествующих царям,— таких, как приемы, охота, пиры, услады гарема, наконец).

Рассказывают также, что однажды к Евклиду явился изучать геометрию некий молодой прагматик. Первый вопрос, который он задал будущему учителю, был следующий: какая практическая польза будет от штудирования «Начал»? Тогда Евклид, весьма и весьма задетый, призвал раба и сказал: «Дай ему обол (грош), он ищет выгоды, а не знаний».

Надо, впрочем, сознаться, что обе истории столь традиционны, учитывая представление древних греков о мудрецах и о математике, что особо доверять им не приходится. «Точные» же биографические данные основываются на заметках неизвестного арабского математика XII века: «Евклид, сын Наукрата, сына Зенарха, известный под именем Геометра, ученый старого времени, по своему происхождению грек, по местожительству сириец, родом из Тира...»

Все.

Человек бесследно растворился в веках. Осталась его работа.

«Начала»

Повторюсь — эта книга уникальна. Более двух тысяч лет она была главным и практически единственным руководством по геометрии для ученых как западного, так и восточного мира. Еще в конце XIX столетия во многих английских школах геометрию изучали по адаптированному изданию «Начал», и вряд ли можно найти более выразительное свидетельство популярности. В этом смысле конкурировать с «Началами» могут разве что Библия и Евангелие.

Но, в отличие от них, основа «Начал» — строгая и жесткая логика, точнее, Евклид все время стремится к таковой. Можно полагать, что он был последователем Платона и Аристотеля. А Платон, как вы помните, требовал строго дедуктивного построения математики.

В фундаменте — аксиомы, основные положения, принимаемые без доказательства, а далее все должно быть строго логично выведено из аксиом. Этот идеал и пытается осуществить Евклид.

С современных позиций буквально вся его аксиоматика неудовлетворительна. Но это легко заявлять сейчас, после 25 веков исследований.

А в свое время логика Евклида оставляла совершенно подавляющее впечатление. Во всяком случае, не следует забывать, что сама логическая схема ее стала с тех пор канонической для построения любого раздела математики.

Попытки изложить геометрию на основе аксиоматического метода были и до Евклида. Но можно уверенно заключить, что работа Евклида была наиболее удачной. Свидетельство тому — необычайная известность его книги уже в древнем мире, благодаря которой она и дошла до нас.

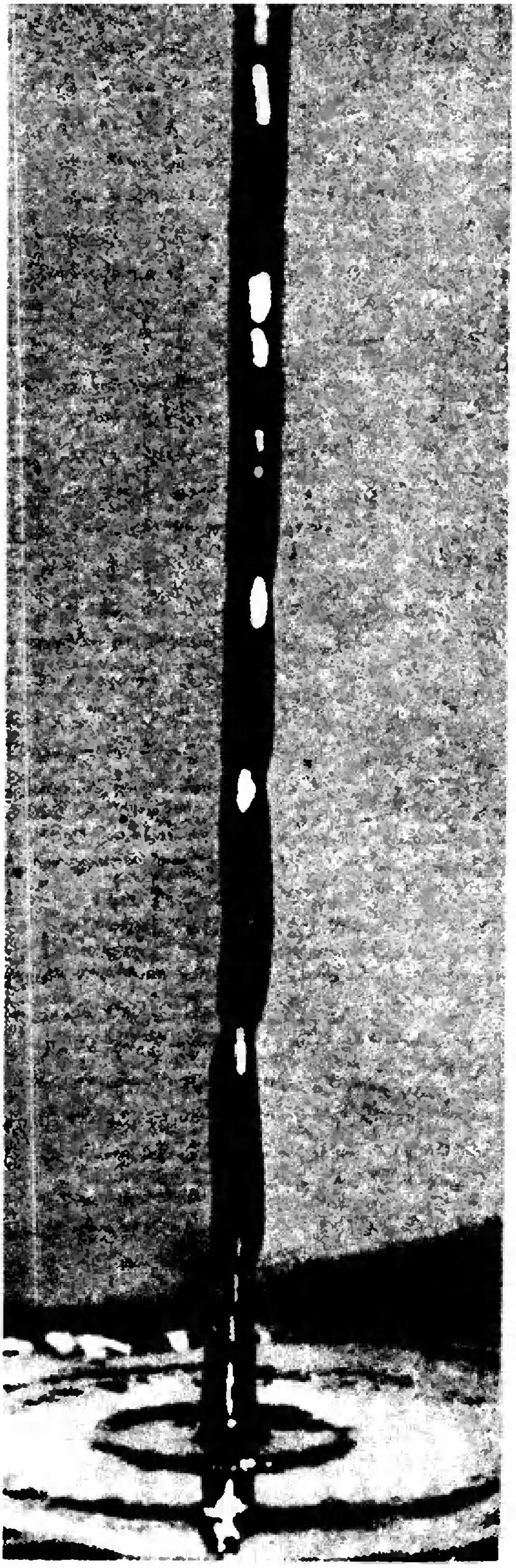
«Начала» блестяще написаны, в них чувствуется мастер своего дела, тонкий ученый и великолепный педагог. Поэтому поголовное поклонение математиков Евклиду и его «Началам» понятно и оправданно. Добавим еще, что эта книга обратила в математическую веру несколько десятков молодых людей, ставших впоследствии крупнейшими математиками мира.

Влияние Евклида было поразительно во все века во всех краях света. Вот, например, в каких восхищенных тонах говорил о «Началах» один из виднейших математиков эпохи Возрождения Кардан: «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что повидимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

А вот слова неизвестного английского геометра (это уже середина XIX века): «Никогда не было системы геометрии, которая в существенных чертах отличалась бы от плана Евклида; и до тех пор, пока я не увижу этого собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать».

Приведу одно яркое свидетельство влияния «Начал» буквально на все области мышления. Один из крупнейших в истории Западного мира философов, замечательный не только как философ, но и как человек — Спиноза — весь план своего основного сочинения «Этика» целиком заимствовал у Евклида.

И, наконец, для тех, кого не убеждает пример Спинозы, я приберег Ньютона. Его основополагающий труд «Начала натуральной философии» копирует не только заглавие книги Евклида, но и ее построение: великий Ньютон тоже выводит все свои результаты из набора аксиом!



ПИНЧ-ЭФФЕКТ

В. БЕРНШТАМ,
И. МАНЗОН

Все, что видим мы,— видимость только одна,
Ибо тайная сущность вещей — не видна.
Омар Хайям

Этой бездонно глубокой мыслью, чей почтенный девятивековой возраст дает ей право на более достойное применение, хочется лишь проиллюстрировать то, что обычная, хорошо знакомая свободно падающая струя не так проста, как кажется на первый взгляд. Если заменить столь несовершенный оптический прибор, как наш глаз с присущей ему инерционностью восприятия изображения, обычным фотоаппаратом, имеющим короткие выдержки (около 1/1000 с), то можно увидеть, что струя представляет собой не просто подрагивающий падающий столбик жидкости, а тело более сложной формы. Во-первых, примерно через одинаковые промежутки на струе наблюдаются сужения, «амплитуда» которых растет по мере удаления от истока; во-вторых, и сама ось струи отличается от прямой, изгибаясь в некое подобие спирали или винта. Здесь мы встречаемся с неустойчивостями жидкого цилиндра. Первую из них называют перетяжечной или «сосисочной», вторую — винтовой. За оба эти действия ответственны силы поверхностного натяжения жидкости, которые столь ярко проявляют себя, стремясь превратить капли росы в правильные шарики. И в этом случае, и в случае со струей силы поверхностного натяжения (их еще называют капиллярными) стремятся уменьшить поверхностную энергию, т. е. свести к минимуму площадь свободной поверхности.

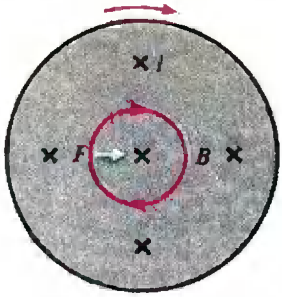
Исследования разрушения струи капиллярными силами имеют долгую и богатую историю, восходящую к работе Савара 1833 года. Среди ученых, изучавших капиллярные явления на струях,— Плато, Рэлей, Бор. Рэлей, например, установил, что если цилиндрическую струю разрезать на одинаковые цилиндры и сделать из них круглые капли, то энергия, связанная с поверхностным натяжением, станет меньше — если высота цилиндров больше длины окружности, лежащей в их основании. Поэтому периодические возмущения формы поверхности струи, у которых длина волны больше периметра сечения, будут расти вплоть до полного разрушения струи.

Интересно, что есть еще одни силы совсем иной природы, которые оказывают на струю подобное действие.

Более 80 лет назад, в 1907 году, вышла в свет статья Эдвина Нортрупа «Некоторые новейшие наблюдения проявления сил внутри электрического проводника», с которой началось изучение гидродинамики электропроводной токонесущей жидкости. Из статьи «Некоторые новейшие наблюдения...»: «Несколько месяцев назад мой друг Карл Геринг описал мне удивительное и, по-видимому, новое явление, которое он наблюдал. Он обнаружил, что при прохождении сравнительно большого переменного тока через жидкий проводник, находящийся в лотке, жидкость сжимается в поперечном сечении и вспучивается по длине лотка, вскарабкиваясь на электроды. При дальнейшем увеличении тока он обнаружил, что сжатие поперечного сечения становится настолько большим в некоторой точке, что образуется глубокий провал в жидкости... С еще бо́льшим увеличением тока провал достигал дна лотка, вследствие чего цепь разрывалась. После этого... жидкость смыкалась снова и опять разрывалась».

Так как действие сил на струю и на проводник похоже на сдавливание и пощипывание (pinch), этот эффект в шутку назвали «пинч-эффектом».

Токонесущая струя жидкого металла — тот интересный объект, где капиллярные и электромагнитные силы действуют сообща и их действие складывается. Приводит это к тому, что сужения («перетяжки») развиваются



быстрее и расстояния между соседними перетяжками становятся меньше. Происходит это вот почему. Как вы знаете, ток, текущий по проводу, создает вокруг него вихревое магнитное поле, линии индукции которого представляют собой окружности. Однако поле возникает не только вне провода, но и внутри него, в толще проводника. Как видно на рисунке, направления поля и тока таковы, что на любой элемент тока действует сила, направленная к оси провода. В невозмущенном состоянии эта сила уравновешивается силой давления жидкости (которое должно быть больше в центре провода). При уменьшении же в каком-то месте толщины струи из-за случайных причин величина индукции магнитного поля в нем увеличивается, электромагнитная сила растет, вытесняя жидкость из узкого участка и еще больше уменьшая радиус струи вплоть до полного разрыва. Подобным же образом разрушает струю и винтовая неустойчивость.

В последнее время у токонесущей жидкометаллической струи появились новые «родственники». Первый из них — это взрывающаяся проволочка (тонкая проволочка, по которой пропускают очень короткие импульсы тока большой величины; этот ток сначала плавит проволочку, а потом разрушает ее точно так же, как и струю, за счет развития неустойчивостей). Нужны взрывающиеся проволочки, чтобы получать импульсы

(Окончание см. на с. 51)

Задачник „Кванта"

Задачи

M1326 — M1330, Ф1333 — Ф1337

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 мая 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1326» или «Ф1333». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер вашей школы и класс, в котором вы учитесь.

M1326. Последовательность (a_n) определяется по следующим правилам:

$$a_0=9,\ a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3 \text{ для любого } k>0.$$

Докажите, что a_{10} содержит более 1000 девяток (в десятичной записи).

М. Вялый

M1327. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D (рис. 1). Докажите, что отрезки,

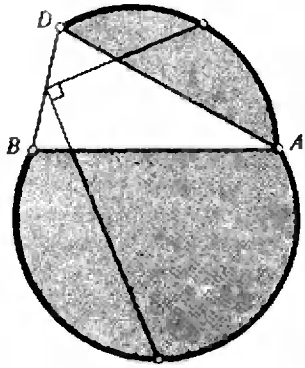


Рис. 1.

соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD, перпендикулярны друг другу.

З. Насыров

M1328. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ не превосходит $n/3$.

Ф. Назаров

M1329. Докажите, что в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ три прямые, соединяющие середины противоположных сторон (т. е. таких, что их концы не соединены никакой стороной этого шестиугольника), пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если площади треугольников ACE и BDF равны.

Н. Седракян

M1330. На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше

а) $n/3$, б) $(n-1)/2$, в)* $n-2$

треугольников.

Д. Фомин

Задачник „Кванта"

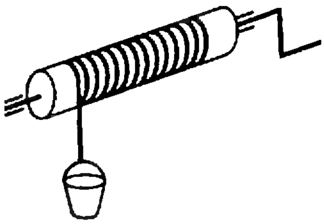


Рис. 2.

Ф1333. Ведро с водой свисает с ворота колодца, тяжелая ручка ворота находится в нижнем положении (рис. 2). Если ведро отпустить, оно начнет двигаться и достигнет дна колодца. Подберем количество воды таким, чтобы при его уменьшении ведро при движении не достигало дна. При каком положении ручки ворота система в этом случае может находиться в равновесии? Веревку считайте легкой. Трением можно пренебречь.

Б. Корсунский

Ф1334. Тонкая квадратная пластинка *АБВГ* сделана из меди. Ее нагревают со стороны торца *АБ*, поддерживая его температуру равной 100 °С, и охлаждают со стороны трех остальных торцов, поддерживая их температуру равной 0 °С. Найдите температуру в центре пластинки.

А. Шапиро

Ф1335. Внутри длинной трубы, наполненной воздухом, двигают с постоянной скоростью поршень, при этом в трубе распространяется со скоростью 320 м/с упругая волна. Считая перепад давлений на границе распространения волны равным 1000 Па, оцените перепад температур. Давление в невозмущенном воздухе 1 атм, температура 300 К.

Р. Александров

Ф1336. Плоский конденсатор, состоящий из двух круглых пластин площадью S, находящихся на малом расстоянии d друг от друга, заряжают до разности потенциалов U. На одинаковом расстоянии L от обеих пластин помещают маленький шарик, масса которого m и заряд q. Шарик отпускают. Найдите его ускорение в первый момент после отпускания и предельную скорость, которую он наберет за большое время. Считайте расстояние L во много раз бо́льшим, чем размеры конденсатора. Силу тяжести не учитывайте.

З. Рафаилов

Ф1337. При исследовании на переменном токе «черного ящика» была использована схема, показанная на рисунке 3. Напряжение звукового генератора на всех частотах было равно 1 В, показания милливольтметра на разных частотах приведены в таблице. Что

Таблица

f, кГц	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
U, мВ	540	90	195	380	520	620	690	750	790	820

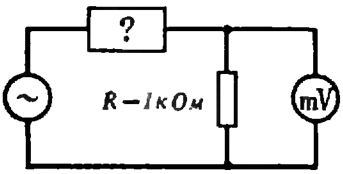


Рис. 3.

может находиться внутри «черного ящика»? Рассчитайте параметры элементов предложенной вами схемы (постарайтесь обойтись без экзотических приборов, все равно никто их вам не доверит — еще испортите!).

А. Ящиков

Решения задач

М1296—М1300, Ф1313—Ф1317

М1296. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезав его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

Ответ: нельзя.

Прежде всего заметим, что при указанных в условии операциях не меняются ни периметр, ни площадь многоугольника. Докажем, что площадь треугольника периметра $2p$ меньше площади квадрата того же периметра. Площадь квадрата равна $p^2/4$. Площадь треугольника, равную по формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, можно оценить с помощью неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt{S}=\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}<\frac{p+p-a+p-b+p-c}{4}=\frac{p}{2},$$

откуда $S\leqslant\frac{p^2}{4}$. (В неравенстве знак $<$, а не $\leqslant$, так как p, $p-a$, $p-b$ и $p-c$ не могут быть равными.)

И. Воронович

М1297. Числа α и β удовлетворяют равенствам

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1,$$
$$\beta^3-3\beta^2+5\beta=5.$$

Найдите $\alpha+\beta$.

Ответ: $\alpha+\beta=2$.

Пусть $f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$. Функция $g(y)=y^3+2y$ — возрастающая и нечетная. Из равенств $g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=-2$ и $g(\beta-1)=f(\beta)-3=2$ следует, что $\alpha-1=-(\beta-1)$. Поэтому $\alpha+\beta=2$.

Б. Кукушкин

М1298. Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участвующий в лотерее во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигрышным считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в этой же клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?

Ответ: 26 билетов.

Чтобы наверняка выиграть, 26 билетов можно заполнить, например, так:

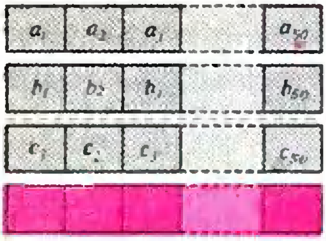
1, 2, 3, ... 25, 26, 27, ... 50
2, 3, 4, ... 26, 1, 27, ... 50
. . . .
25, 26, 1, ... 23, 24, 27, ... 50
26, 1, 2, ... 24, 25, 27, ... 50

В карточке-эталоне хотя бы одно из чисел 1, 2, ..., 26 должно находиться на одном из первых 26-ти мест, поскольку остальных мест всего 24. Это число и сделает одну из заполненных карточек выигрышной.

В то же время любые 25 заполненных карточек не гарантируют выигрыша. Докажем это. Расположим 25 заполненных карточек и эталон, как показано на рисунке.

Будем заполнять эталон так, чтобы ни одно из чисел, записанных в эталоне, не совпадало с числами, записанными над ним.

Ясно, что единицу можно записать в эталон с соблюдением условия. Пусть уже записаны числа 1, 2, ..., $a-1$. Рассмотрим число a. Если его можно записать



в одну из оставшихся клеточек эталона, сделаем это.

Если нельзя, т. е. если в клетках, допустимых для a (этих клеток не меньше 25-ти), уже стоят числа x_1, $x_2, \dots x_{25}, \dots, x_k$. выберем любую свободную клетку. В столбце над ней стоят не больше 25-ти чисел, среди которых есть и число a, так что чисел, не равных a, среди них не больше 24. Выберем число x_i, не содержащееся в этом столбце, запишем его в пустую клетку, а на место числа x_i впишем a. Продолжая этот процесс, придем к заполнению эталона, при котором ни один из 25-ти билетов не будет выигрышным.

А. Берзиньш

M1299. На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Докажите, что если на доске первоначально были выписаны n единиц, то в результате всех операций на доске останется число не меньшее чем $1/n$.

Из почти очевидного неравенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}\,(a>0,\ b>0)$$

следует, что сумма S обратных величин чисел, записанных на доске, не увеличивается. Вначале она была равна n. Поэтому в конце процесса $S\leqslant n$. Но это и значит, что последнее записанное число $1/S\geqslant 1/n$.

Б. Берлов

M1300. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие). Следователь считает, что все ответы будут верные; он подсчитал, что в любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса. Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос может быть дан неверный

Первоначальный план следователя модифицируется включением дополнительных вопросов. Сначала следователь задает 13 вопросов, предусмотренных его первоначальным планом. После этого он задает 14-й вопрос: «Солгали ли вы в предыдущей серии вопросов?» Если свидетель отвечает «нет», то задаются серии из 12, 11, ..., 2 и 1 вопросов исходного плана, причем контрольный вопрос повторяется после каждой серии. Если на один из контрольных вопросов получен ответ «да», эта серия вопросов повторяется, после чего допрос идет по первоначальному плану уже без контрольных вопросов (свидетель может солгать лишь однажды).

Пусть ответ «да» получен на k-й контрольный вопрос. Тогда сверх исходного плана будет задано $k+14-k=14$ вопросов. Таким образом, такой план позволит следователю выяснить истину за 105 вопросов.

В общем случае, если по первоначальному плану следователь должен задать N вопросов, то в ситуации, когда на один из вопросов может быть дан неверный ответ, наш способ гарантирует выяснение истины за $N+q$ вопросов, где q — наименьшее натуральное число, для которого $N\leqslant q(q-1)/2$.

Задачник «Кванта»

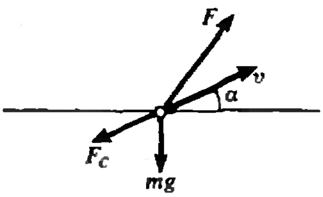
ответ (но может быть, что все ответы верные).

Примечание: если у вас получаются только планы с более чем 105 вопросами, напишите лучший из них.

Интересно выяснить, является ли это число вопросов наименьшим, а также разобраться в аналогичной задаче, где на k вопросов могут быть даны неверные ответы.

А. Анджанс, И. Соловьев, В. Слитинский

***Ф1313.** Шмель может лететь вертикально вверх с максимальной скоростью v_1, а вниз — со скоростью v_2. Считая «силу тяги» шмеля не зависящей от направления полета, а силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости шмеля, определите максимальную скорость полета шмеля под углом α к горизонту.*



Запишем условия равномерного полета шмеля вверх:

$$F-mg=F_{c1}=kv_1$$

и вниз:

$$F+mg=F_{c2}=kv_2.$$

Отсюда можно выразить отдельно «силу тяги» F и силу тяжести mg через постоянный коэффициент k и скорости:

$$F=\frac{k}{2}(v_1+v_2),\ mg=\frac{k}{2}(v_2-v_1).$$

Пусть искомая скорость шмеля равна v и направлена под углом α к горизонту. Тогда можно записать (см. рисунок):

$$\vec{F}+m\vec{g}+\vec{F}_c=0,$$

или

$$F^2=m^2g^2+F_c^2+2mgF_c\sin\alpha.$$

Поскольку $F_c=kv$, после простых преобразований получим

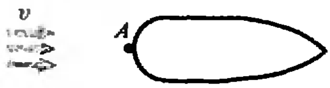
$$v^2+(v_2-v_1)\sin\alpha\cdot v-v_1v_2=0,$$

и

$$v=\left(\sqrt{(v_2-v_1)^2\sin^2\alpha+4v_1v_2}-(v_2-v_1)\sin\alpha\right)/2.$$

Б. Корсунский

***Ф1314.** Модель дирижабля обдувают в аэродинамической трубе потоком воздуха со скоростью $v=300$ м/с. В точке A (точно по оси) скорость потока обращается в нуль (см. рисунок). Найдите температуру воздуха около этой точки. Наружная температура равна $T=300$ К.*



Обозначим температуру и давление воздуха вдали от модели T_1 ($T_1=T=300$ К) и p_1, а в интересующей нас точке — T_2 и p_2. В случае стационарного потока можно проследить за некоторой порцией газа — как она перемещается и что с ней происходит. Возьмем для определенности один моль воздуха (молярная масса воздуха $M=29$ г/моль) и рассмотрим «трубу», в которую он входит вдали и из которой выходит около модели. Чтобы избежать чисто формальных трудностей, связанных с полной остановкой потока возле интересующей нас точки, будем считать эту скорость малой по сравнению с начальной (но не равной в точности нулю!).

Внешний воздух, «заталкивая» нашу порцию газа в «трубу» у входного отверстия, совершает над газом работу

$$A_1=p_1V_1,$$

где V_1 — объем одного моля воздуха при температуре T_1. Выходя из трубы, газ совершает работу, «расталкивая» окружающий воздух, т. е. над газом совершается отрицательная работа

$$A_2 = -p_2 V_2,$$

где V_2 — объем моля воздуха при температуре T_2.

Будем считать, что газ в «трубе» не обменивается теплом с окружающим воздухом. (Строго говоря, это не так, но разумно оценить такой теплообмен мы не сможем. Поэтому мы получим верхнюю границу для интересующего нас температурного эффекта.) Тогда изменение внутренней энергии нашей порции газа определяется работой внешних сил и изменением кинетической энергии движения этой порции как целого:

$$A_1 + A_2 + \frac{Mv^2}{2} = \Delta U = C_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1)$$

(воздух — двухатомный газ, поэтому для него молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = 5/2\,R$).

Используя уравнение состояния идеального газа для одного моля $pV = RT$, найдем

$$A_1 = p_1 V_1 = RT_1, \quad A_2 = -p_2 V_2 = -RT_2.$$

Теперь можно записать:

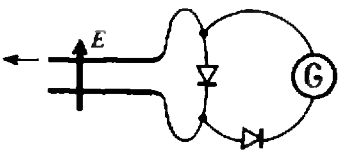
$$RT_1 - RT_2 + \frac{Mv^2}{2} = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1),$$

откуда

$$T_2 = T_1 + \frac{Mv^2}{7R} \approx 345\ \text{К}.$$

А. Зильберман

***Ф1315.** Для измерения напряженности (E) электростатического поля в опыте используют плоский конденсатор ($S = 100$ см^2, $d = 1$ мм), одна из пластин которого неподвижна (см. рисунок). Другую пластину периодически с помощью специального механического устройства*



Если замкнуть между собой пластины конденсатора, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью E, то на пластинах возникнут разноименные заряды

$$q_1 = -q_2 = CEd = \varepsilon_0 SE.$$

В нашем случае при каждом толчке площадь обкладки конденсатора изменяется от величины S до нуля и обратно. Это значит, что заряды обкладок также периодически изменяются.

В нашей схеме диоды включены так, что заряды стекают через один диод, а притекают обратно — через другой. Таким образом, ток через гальванометр не равен в среднем нулю (как было бы в схеме без диодов — если просто замкнуть пластины через гальванометр).

Каждый раз через гальванометр протекает заряд, равный

$$q = \varepsilon_0 SE.$$

скачком убирают в сторону, резко уменьшая емкость конденсатора. Считая элементы измерительной цепи (диоды и гальванометр) идеальными, найдите показания гальванометра при $E=1000$ В/см и периоде механических толчков $T=0{,}01$ с. Подумайте, сильно ли зависит ответ от возможной неидеальности диодов и гальванометра.

Задачник „Кванта"

Поэтому средний ток через него равен

$$I=\frac{q}{T}=\frac{\varepsilon_0 SE}{T}=8{,}85\cdot 10^{-7}\ \text{А}\approx 0{,}9\ \text{мкА}.$$

При данной частоте толчков стрелка гальванометра практически не дрожит, так что его показания такими и будут.

В ответ не вошла одна из заданных в условии величин — расстояние между пластинами d. Значит ли это, что она не нужна? Не совсем. Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна

$$\Delta\varphi=Ed=100\ \text{В}.$$

По сравнению с этой величиной напряжение открытого диода пренебрежимо мало (оно составляет несколько сотен милливольт), а это существенно для нашего решения — мы ведь считали, что заряды полностью стекают с пластин.

Неидеальность диода может проявляться в наличии небольшого обратного тока (у идеального диода ток в обратном направлении в точности равен нулю). Впрочем, у достаточно распространенных кремниевых диодов обратный ток во много раз меньше «полезного» тока 0,9 мкА, и этой неидеальностью вполне можно пренебречь.

Не очень важна и неидеальность гальванометра — она связана с тем, что его сопротивление R не равно нулю (как у идеального измерителя тока), а составляет обычно несколько сотен ом. Для нас важно, чтобы за половину периода T заряды успевали практически полностью перетекать, т. е. чтобы

$$RC\ll T.$$

В нашем случае $C=\varepsilon_0 S/d\approx 10^{-10}$ Ф (опять пригодилось значение d) и

$$RC\approx 10^{-7}\ \text{с}\ll T=10^{-2}\ \text{с}.$$

З а м е ч а н и е. На практике пластину не толкают, а поворачивают — пластины делают в виде двух полукругов. Проблема измерения напряженности электростатического поля состоит в том, что для отклонения стрелки гальванометра нужно совершать работу, а электростатическое поле этого «не умеет», потому и приходится прибегать к механическим устройствам. Сама же величина E очень важна. Например, для самолета, летящего в облаках,— чтобы не попасть в область электрических разрядов.

З. Рафаилов

Задачник „Кванта"

***Ф1316.** Полупроводниковый терморезистор имеет зависимость сопротивления от температуры вида $R=R_0(1-\alpha t)$. Когда терморезистор нагрет до температуры t, он рассеивает в окружающую среду мощность $P=B(t-t_{окр})$. Какой ток будет течь в цепи, если к терморезистору подключить источник с напряжением U?*

Пусть при напряжении U ток через терморезистор составит I. Тогда запишем

$$R=\frac{U}{I}=R_0(1-\alpha t),$$

$$P=UI=B(t-t_{окр}).$$

Для того чтобы найти связь между током и напряжением, нужно исключить из этих уравнений температуру t:

$$t=t_{окр}+\frac{UI}{B},$$

$$\frac{U}{I}=R_0\left(1-\alpha t_{окр}-\alpha\frac{UI}{B}\right),$$

$$U=\frac{R_0(1-\alpha t_{окр})}{\alpha R_0 I/B+1/I}.$$

При малых токах, когда мощность мала и температура терморезистора почти не отличается от окружающей, он ведет себя как обычный резистор с сопротивлением $R=R_0(1-\alpha t_{окр})$. С увеличением тока температура резистора увеличивается и при больших токах приближается к критическому значению

$$t_{кр}=1/\alpha.$$

Но вопрос в задаче поставлен несколько иначе: каким будет ток при подаче напряжения U? Сложность в том, что одному значению U соответствуют два (либо — при больших напряжениях — ни одного) значения тока. Легко найти граничное напряжение $U_{гр}$, выше которого решения нет,— оно соответствует минимальному значению знаменателя при токе $I=I_{кр}$:

$$U_{гр}=U(I_{кр})=U\left(\sqrt{\frac{\alpha R_0}{B}}\right)=\frac{R_0(1-\alpha t_{окр})}{\sqrt{B/(\alpha R_0)}(1+(\alpha R_0/B)^2)}.$$

Выше этого напряжения решений нет. Но все же — какой ток потечет по цепи, если подключить к ней напряжение большее, чем $U_{гр}$? Какой-нибудь наверняка потечет, только мы его не сможем подсчитать, исходя из условий задачи — они становятся противоречивыми. Ясно, что «настоящий» терморезистор имеет другую — более сложную — зависимость сопротивления от температуры (она не дает отрицательных значений сопротивления при $t>t_{кр}=1/\alpha$), и там подобной проблемы не будет.

Теперь о той области напряжений, для которой возможны два значения тока. Если медленно повышать напряжение, то и ток будет повышаться, т. е. реализуется меньшее из двух значений тока. Но возможно равновесие и при втором — большем значении, если резистор заранее «подогреть». Подумайте сами, будет ли такое равновесие устойчивым.

А. Зильберман

Задачник „Кванта"

Ф1317. К усилителю низкой частоты подключаем громкоговоритель и микрофон и устанавливаем их на расстоянии 0,5 м друг от друга. Плавно увеличивая усиление, добьемся того, что система «завоет». Оцените частоту звука при этом. Что изменится, если выводы громкоговорителя поменять местами? (Примечание: такой опыт легко проделать при помощи обычного магнитофона.)

Самовозбуждение системы (мы слышим, как она «воет») связано с наличием положительной обратной связи между микрофоном и громкоговорителем. Толчок, приводящий к сдвигу мембраны микрофона, вызывает появление сигнала на выводах микрофона. Усиленный сигнал сдвигает диффузор громкоговорителя, появляется звуковая волна, «добежав» до микрофона, она толкает его мембрану и т. д.

Почему мы называем такую обратную связь «положительной»? В самом деле для различных частот эта связь различна, но интересующий нас шумный эффект связан как раз с тем, что на некоторых частотах связь именно «положительная».

В зависимости от подключения выводов громкоговорителя, условие «баланса фаз» для частоты f будет выглядеть так:

$$\frac{l}{v}=\frac{1}{f}\,n \text{ либо } \frac{l}{v}=\frac{1}{f}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

где l/v — время распространения звуковой волны от громкоговорителя до микрофона, n — целое положительное число.

На какой же именно частоте «взвоет» система, если плавно прибавлять усиление? Ответ зависит от того, насколько «одинаково» излучает громкоговоритель звуки разных частот (и микрофон тоже — его чувствительность к звукам разных частот тоже различна). Обычно неравномерность частотной характеристики громкоговорителя довольно велика. Простой, без затей, громкоговоритель лучше всего работает на частотах 1—2 килогерца, намного хуже он излучает низкие частоты. Именно на этих частотах и возникнет самовозбуждение. Интересно, что, меняя усиление на различных частотах при помощи регулятора тембра усилителя, можно в довольно широких пределах изменять эту частоту.

Итак:

$$\text{при } n=1\ f_1=\frac{nv}{l}=\frac{330\ \text{м/с}}{0{,}5\ \text{м}}=660\ \text{Гц}$$

$$\text{или } f_1=\frac{3}{2}\frac{330\ \text{м/с}}{0{,}5\ \text{м}}=990\ \text{Гц},$$

$$\text{при } n=2\ f_2=1320\ \text{Гц или } f_2=1650\ \text{Гц},$$

$$\text{при } n=3\ f_3=1980\ \text{Гц или } f_3=2310\ \text{Гц}.$$

Это наиболее подходящие для самовозбуждения частоты. Ясно, что звук вовсе не будет «синусоидальным» — он будет содержать множество гармоник.

Р. Александров

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1276—М1290, Ф1283—Ф1297, справились с задачами М1276, М1277, М1281, М1282, М1286. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

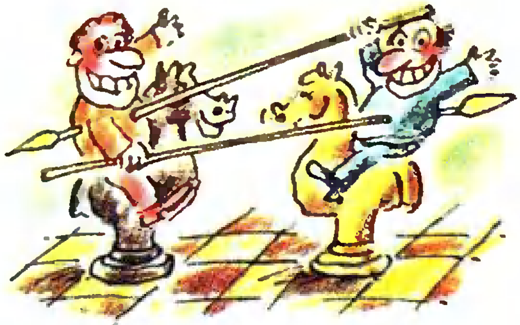
Математика

Е. Аксенова (Санкт-Петербург) 87, 88; *Ю. Алексеенко* (Киев) 78, 79, 83—85, 87—90; *А. Алиев* (Баку) 79, 84, 87, 88; *Д. Антипов* (Киев) 84, 87, 88; *Ж. Асылбеков* (Алма-Ата) 84, 87; *А. Ахмедов* (Баку) 83, 84, 87, 88; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 88; *Е. Беркович* (Киев) 88; *Ю. Бондарчук* (Киев) 87, 88; *А. Бородин* (Донецк) 78—80, 83—85, 87—90; *В. Бринюк* (Донецк) 78, 79, 83—85, 87—89; *А. Буздалин* (Москва) 84, 87, 88; *О. Бурд* (Киев) 78, 88; *П. Бусоргин* (Полинск) 87; *Б. Вайнер* (Киев) 78, 83, 84, 87—90; *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) 87—89; *И. Винарчук* (Киев) 87—89; *Ю. Войценко* (Днепрорудный) 87; *М. Волошина* (Москва) 78; *М. Воронецкая* (Ижевск) 78, 87, 88; *О. Гайдай* (Львов) 78, 79, 83, 84, 87, 88, 90; *В. Гамидов* (п. Борадыгях) 84, 87, 88; *П. Гвоздев* (п. Котельнич Кировской обл.) 84, 87; *С. Гетун* (Киев) 83, 84, 87—89; *А. Гордиященко* (п. М. Рогань Харьковской обл.) 84; *Ю. Горенбургов* (Санкт-Петербург) 78, 87—89; *П. Григорьев* (Самара) 79, 87, 88, 90; *А. Григорян* (Кумайри) 87, 88; *В. Григорян* (Ереван) 84; *Т. Григорян* (Ереван) 87; *С. Гудзенко* (Павлоград) 78, 87; *Ю. Дадамов* (п. Борадыгях) 84, 87, 88; *И. Доманов* (Донецк) 84, 87; *Д. Дудко* (Киев) 79, 83, 84, 87—90; *Г. Дудьева* (Донецк) 84; *Ф. Еникеева* (Ташкент) 78; *А. Жученко* (Донецк) 83, 84, 87, 88; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 83, 84, 87—89; *В. Замятин* (Киров) 87, 88; *С. Зиновьев* (Харьков) 83, 84, 87, 88; *С. Зиновьев* (Москва) 79; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) 83—85, 87—90; *Р. Исмаилов* (Санкт-Петербург) 79, 80, 83, 84; *В. Казанцева* (Ижевск) 87; *Е. Каминская* (Одесса) 84; *Т. Карнаух* (Киев) 79, 84, 87, 88, 90; *Д. Картохин* (Санкт-Петербург) 88; *Р. Касымов* (Ангрен) 84, 87, 88; *С. Климов* (Ижевск) 78, 79, 83—85, 87, 88; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) 79, 84, 87, 88; *А. Коган* (Днепропетровск) 87, 88; *П. Кожевников* (Калуга) 78, 79, 83, 84, 87—90; *К. Козлов* (Глазов) 78, 79; *А. Копытин* (Воронеж) 84, 87, 89; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 87—89; *В. Коростышевский* (п. Ясный Оренбургской обл.) 84; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 79, 84; *А. Кривенко* (Ростов) 87; *Д. Кример* (Брест) 88; *И. Кузнецова* (Новороссийск) 87; *С. Кузьмич* (Минск) 78—80, 83, 87—90; *А. Кукушкин* (Москва) 83, 85, 87, 88, 90; *И. Курляндчик* (Санкт-Петербург) 78, 80; *Я. Лавренюк* (Киев) 78, 79, 84, 87, 88; *И. Левин* (Москва) 84, 88; *П. Левин* (Москва) 87—89; *Н. Лисицын* (Ижевск) 83, 84, 87—89; *Э. Магеррамов* (Баку) 79, 87, 88; *О. Макеева* (Винница) 78; *А. Малыш* (Хабаровск) 88; *Н. Мамедов* (Баку) 78, 87, 88; *Д. Мартынов* (Нижний Новгород) 87, 88; *А. Мелконян* (Кумайри) 87, 88; *А. Мельник* (Гайворон) 83; *А. Мимеев* (Владимир) 88; *М. Мокляк* (Кременчуг) 83—85, 87, 88; *А. Монахов* (Глазов) 87, 88; *А. Мороз* (Днепропетровск) 87, 88; *А. Мотрунич* (Ужгород) 84, 87, 88; *Т. Назарова* (Желтые Воды) 84, 87; *А. Назарян* (Тбилиси) 87; *Б. Насыпанный* (Гайворон) 78, 83—85, 88; *В. Неселовский* (Одесса) 88; *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) 83, 84, 87—89; *С. Павличков* (Евпатория) 79, 83—85, 87, 88; *Д. Панов* (Москва) 78, 83—85, 87—90; *Е. Перельман* (Санкт-Петербург) 79, 83; *А. Петросян* (Ереван) 78, 83, 84, 87—90; *В. Пиковский* (Киев) 87—89; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 78; *М. Плетюхов* (Брест) 84; *Ю. Полонский* (Витебск) 78, 79, 83, 87—90; *Т. Потапова* (Новгород) 87; *Н. Пошвенчук* (Пинск) 84, 87; *О. Пушин* (Санкт-Петербург) 84, 88; *К. Рахимов* (Хорезм) 84; *Д. Рекалов* (Киев) 87, 89, 90; *Ф. Рзаев* (п. Борадыгях) 87, 88; *Д. Рудаков* (Москва) 78; *А. Рымов* (Талды-Курган) 78; *Л. Рябова* (Клин) 87; *Ю. Савицкий* (Донецк) 83, 84, 87, 88; *С. Сагадатов* (Уфа) 88; *А. Сарсембаев* (Алма-Ата) 79, 87; *В. Севриновский* (Москва) 78, 79, 84, 88, 89; *С. Сикорский* (с. Вузловая Львовской обл.) 78, 84; *Г. Сироткин* (Харьков) 79, 84; *А. Соклаков* (Брест) 88; *В. Соколов* (Хабаровск) 88; *А. Солодушкин* (Томск) 78, 83, 84, 87—89; *И. Сорожо* (Минск) 87; *В. Спирин* (Саратов) 88; *В. Степанов* (Апатиты) 87; *Д. Сухов* (Энергодар) 79, 84; *А. Таратин* (Северодвинск) 87, 88; *О. Тевс* (Донецк) 87; *А. Теплинский* (Каменец-Подольский) 79, 87—89; *М. Тройников* (Ижевск) 87, 88; *Д. Туретаев* (Алма-Ата) 84; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) 79, 87; *Е. Турчин* (Днепропетровск) 79, 84, 85, 87—89; *К. Удод* (Донецк) 87, 88; *А. Уханов* (Евпатория) 79, 84, 85, 87, 88; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 79, 83, 84, 87—90; *А. Флджян* (Кумайри) 87, 88; *У. Хаджаев* (Хорезмская обл.) 84; *Ф. Хаитова* (Шават) 87; *М. Хасин* (Донецк) 78, 83—85, 87, 88; *А. Хацкевич* (Брест) 84; *К. Хвенкин* (Минск) 78, 80, 83, 84, 87—89; *Р. Ходжаниязов* (Хорезмская обл.) 78; *Ю. Ходзинский* (Киев) 79; *К. Чередниченко* (Севастополь) 78, 79, 84, 87; *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 83, 84, 87, 89; *Н. Шешина* (Нижний Тагил) 88; *О. Шпырко* (Киев) 83, 84, 87; *В. Яновский* (Харьков) 78, 80, 83, 84, 87—90.

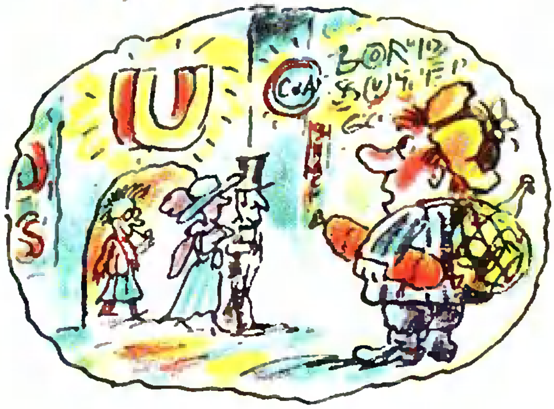
Физика

Ю. Адамов (Минск) 93; *Д. Антипов* (Киев) 83, 85, 86, 93, 95; *Д. Апальков* (Харьков) 83, 89, 93—95; *Д. Асадов* (Имишли) 89, 95; *Я. Бабкин* (Киев) 89, 90, 93, 95, 97; *С. Базылько* (Северодвинск) 93, 95; *И. Бейбалиев* (с. Чиликар Хивского р-на) 93; *К. Блиох* (Харьков) 84, 85; *Д. Боднарь* (Винница) 93, 95, 97; *В. Борохов* (Керчь) 93; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 93; *Е. Буривцов* (Уфа) 83; *С. Васильев* (Горловка) 93, 96; *А. Ващилко* (Барановичи) 93; *П. Волынец* (Брест) 83—86, 89, 90; *И. Воскобойник* (Киев) 84, 86, 88—90, 93—97; *А. Вылугин* (Донецк) 89, 90; *А. Гаврилов* (Алма-Ата) 93; *Д. Гагасов* (Борисов) 84, 85, 88, 89, 92, 93; *О. Гайдай* (Львов) 88, 89, 93, 95; *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) 83, 84, 88, 89, 92, 93; *А. Галанин* (Сергиев Посад) 83—91, 93—95, 97; *П. Гвоздев* (Котельнич) 89, 93, 95; *В. Глазков* (Коломна) 83—85, 93, 97; *В. Головач* (с. Волока Черновицкой обл.) 83, 84, 89, 90, 92, 93, 97; *В. Горгадзе* (Нальчик) 83—87, 93—97; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 83—86, 88—97; *А. Гревцев* (Москва) 83—86, 88—95, 97; *А. Григорян* (Кумайри) 93; *Т. Григорян* (Ереван) 88, 89, 93, 95; *Я. Грода* (Брест) 93; *Ю. Гройсман* (Ташкент) 83, 86, 93, 95, 97; *Р. Гулгазарян* (Ереван) 88—90, 93, 95; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 83, 85—97; *А. Гуреев* (Новгород) 89, 95; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 83, 86, 87; *В. Дербенев* (Кропоткин) 89, 93—95; *А. Дереглазов* (Самара) 89; *С. Дибров* (Киев) 93, 95; *И. Дискин* (Запорожье) 83; *А. Дубков* (Москва) 88, 89, 93, 95; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 88, 89, 92, 93, 95—97; *Ю. Егоров* (Авдеевка) 84—86, 89, 90, 93, 95, 96; *А. Ельников* (Донецк) 88—90, 93—97; *С. Емельянов* (Канаш) 83—87, 93—97; *А. Ермошко* (Орша) 84, 86; *Н. Ефремов* (Екатеринбург) 83, 85, 86, 89, 92, 94; *С. Жак* (Тернополь) 84, 88—90, 92—95, 97; *В. Железняков* (Вольск) 93; *В. Жукова* (Кузнецовск) 93, 95; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 83—86, 89, 90, 92, 93, 95; *А. Жураев* (Таллинн) 89, 93; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 83—87; *С. Занкович* (Николаев) 83—93, 95—97; *А. Засепский* (Брест) 83, 85, 88, 89; *М. Зацепин* (Липецк) 85, 89, 90, 94; *И. Зозуля* (Одесса) 84—87, 89, 91, 92, 95—97; *А. Зубков* (Москва) 93—97; *С. Ивленков* (Тольятти) 83; *Н. Ивченко* (Киев) 83—88, 90, 92—97; *А. Исаенко* (Жлобин) 95; *Б. Иютин* (Тула) 93, 94; *Ч. Камчибеков* (Арзамас) 84, 89; *О. Каргольцев* (Мичуринск) 84, 93; *И. Катеринчук* (Городок) 93; *Д. Кашурин* (Киев) 93; *Н. Клембовский* (Николаев) 83, 85, 86, 88—90, 92—95, 97; *И. Кобелев* (Сергиев Посад) 88, 89; *К. Коваль* (Запорожье) 83—85, 88, 89, 92, 93, 95, 97; *А. Ковальский* (Казань) 89; *Д. Коверник* (Иркутск) 89; *В. Кожевников* (Североморск) 83, 84, 93; *Н. Козачек* (Червоноармейск) 93; *В. Козлов* (Старый Оскол) 83—97; *Т. Колесникова* (Вишневое) 83, 86, 89, 92, 93; *В. Коновалов* (Старый Оскол) 89, 93; *П. Корешков* (Черкассы) 93—95; *А. Король* (Брест) 85, 88, 89, 92—95, 97; *М. Косицин* (Тольятти) 83, 89; *Д. Кример* (Брест) 83—86, 88, 89, 93; *И. Кузнецова* (Новороссийск) 89, 93; *А. Кукушкин* (Москва) 88, 89; *Ю. Кулик* (Канев) 83—85, 88—90, 92—95, 97; *В. Куликов* (Москва) 84; *А. Куранов* (Москва) 93, 95; *А. Кутлимуратов* (Дружба) 83; *Д. Лазорук* (Ивано-Франковск) 85; *С. Лапицкий* (Гродно) 83, 84, 89; *В. Ларькин* (Правдинск) 83, 85—89, 91—95, 97; *В. Лель* (Усть-Каменогорск) 86; *В. Леонов* (Старый Оскол) 83; *В. Линев* (Скопин) 89; *И. Линчевский* (Брест) 83; *В. Лобас* (Киев) 85; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 83, 84; *Ю. Маравин* (Евпатория) 83, 85—88, 90, 92—97; *А. Матрунич* (Ужгород) 83—87, 89—97; *М. Махмудов* (Исфара) 83, 85, 86, 89, 93, 95, 96; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 83—85, 87—91, 93, 95, 97; *А. Меликян* (Ереван) 95; *А. Мелконян* (Кумайри) 93; *В. Мушик* (Кузнецовск) 83, 84, 89, 93—95; *А. Назарян* (Тбилиси) 93, 95; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 84, 85, 88, 89, 93, 95; *А. Науменко* (Севастополь) 93, 95, 97; *А. Нежуренко* (Киев) 83—87, 89, 93—97; *Д. Немировский* (Черкассы) 93, 95, 97; *М. Немировский* (Одесса) 84, 88—90, 92; *И. Олимов* (Ходжент) 84; *А. Ольховец* (Киев) 83, 85, 86, 88—90, 92, 93, 95—97; *Д. Островский* (Санкт-Петербург) 83—86, 88—92; *Х. Оталконов* (Ургенч) 83; *Х. Отоженов* (Ургенч) 93, 95; *М. Охрименко* (Черкассы) 83—85; *А. Павлин* (Новая Ушица) 93, 95; *А. Пасеко* (Кузнецовск) 83, 84, 93, 95; *Д. Пастухов* (Витебск) 84—97; *Д. Петрайтис* (Вольск) 83, 84, 93, 95; *А. Пикалов* (Канаш) 83—91, 93—96; *В. Писляков* (Тверь) 83, 84, 93, 95, 97; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 85, 93; *М. Плетюхов* (Брест) 83—86, 89, 90, 93—95, 97; *С. Польшин* (Харьков) 85—87; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 83, 88, 89, 92; *Е. Порошенко* (Алма-Ата) 84; *Д. Потишко* (Харьков) 84, 86, 87, 89, 90, 92, 95, 97; *С. Прокушев* (Сосногорск) 93, 95; *Е. Рослый* (Омск) 83—85; *В. Рыбачук* (Винница) 93, 95, 97; *К. Селтнепесов* (Ашхабад) 83, 84; *А. Семенюга* (Сосновый Бор) 93, 94, 97; *В. Сергиенко* (Брест) 83; *В. Сиско* (Таллинн) 83, 84; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 83, 84; *Н. Сокдыкбеков* (Алма-Ата) 83, 85, 86; *А. Сокпаков* (Брест) 83—86, 88, 89, 93; *А. Столповская* (Днепрорудный) 88—90; *А. Тарасов* (Пятигорск) 88—90, 92; *А. Таратин* (Северодвинск) 88, 89; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 84, 88, 89, 93; *А. Терентьев* (Канаш) 83—91, 93—97; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 83—86, 88, 89, 93; *В. Толпекин* (Одесса) 83, 85, 86, 88, 89, 91—93, 97; *Е. Топчий* (Запорожье) 84; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 83, 86, 87; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 83, 86, 87, 89—92; *А. Федоренко* (Омск) 89, 90, 93, 95, 97; *Д. Федорец* (Харьков) 89—92, 95, 97; *А. Флджян* (Кумайри) 93; *М. Фролов* (Воронеж) 83; *М. Хамаза* (Нижний Новгород) 84, 85, 89, 92; *Р. Хапков* (Старый Оскол) 83, 85, 88, 89; *А. Хацкевич* (Брест) 83—85, 89, 90, 93—95; *С. Чиков* (пгт Светлый Яр) 89, 95; *А. Чистый* (Брест) 83—86, 88, 89, 93—95; *Д. Чичкан* (Барановичи) 83, 84, 86—89, 91, 93; *Е. Шабловский* (Могилев) 89, 95; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 83—85, 89, 93—95; *А. Шкредов* (Витебск) 93, 95; *А. Шпагин* (Мариуполь) 83, 85, 86, 88—95, 97; *В. Шпырко* (Киев) 95; *И. Шпырко* (Киев) 93, 95; *О. Шпырко* (Киев) 83—97; *И. Шукрулло* (Ургенч) 83, 84; *А. Шукуров* (Гузарский р-н Кашкадарьинской обл.) 89, 93, 95; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 88—91, 93, 95—97; *А. Щекин* (Запорожье) 85, 86; *Д. Юдин* (Самара) 83—85, 89, 90; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 83—86, 88—97; *А. Ямилов* (Донецк) 83, 89, 93, 95; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 83, 84, 88—95, 97.

Задачи



1. Когда закончился шахматный турнир, выяснилось, что каждый его участник выиграл белыми фигурами столько же партий, сколько все остальные участники выиграли черными. Докажите, что все участники одержали по одинаковому числу побед.

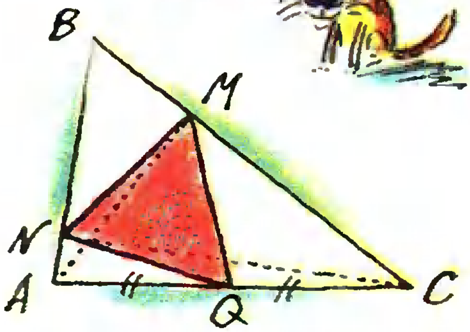


2. В Лондоне над входом в метро висит не буква *M*, а буква *U*, поскольку по-английски метро называется *underground*, что означает «подземка». Это слово начинается и оканчивается одной и той же комбинацией из трех букв. Найдите русские слова с таким же свойством (содержащие больше 6 букв).

3. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

4. Маша и Катя вместе весят 40 кг, Катя и Света — 50 кг, Света и Даша — 60 кг, Даша и Галя — 70 кг, Галя и Маша — 80 кг. Сколько весит каждая из девочек?

5. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, AM и CN — его высоты, а Q — середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ — равносторонний.



Эти задачи нам предложили С. Токарев, И. Акулич, Л. Мочалов, Н. Нецветаев и В. Произволов.

Про умножение

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Кому как, а мне таблица умножения давалась с трудом. Конечно, «дважды два — четыре» и «пятью пять — двадцать пять» запомнились легко, а вот «семью восемь» или «девятью шесть» никак не укладывались в голове. «Трудные» произведения я вычислял примерно так: «пятью восемь — сорок, да дважды восемь — шестнадцать, значит, всего пятьдесят шесть». Но учитель требовал беглых ответов, и таблицу приходилось «долбить» наизусть. Это знакомо не только мне одному — недаром сотни лет школяры разных стран, каждый на своем языке, называли ее «долбица умножения». (Между прочим, среди моих учеников — студентов физтеха — встречаются такие, кто знает ее весьма нетвердо.)

В конце концов таблицу я выучил. Впоследствии выяснилось, что это было нужно не учителю, а мне самому: с ее помощью оказалось возможным перемножать любые числа, причем довольно быстро.

Так я прожил много лет в полной уверенности, что без таблицы умножения числа быстро не перемножить. Эту уверенность подкрепляло то, что я узнавал о способах умножения в Индии, Китае, в Европе эпохи Возрождения...

И вот однажды я наткнулся на «русский крестьянский способ умножения», который был распространен в России два столетия назад, и с изумлением обнаружил, что русские крестьяне умели перемножать числа *без помощи таблицы умножения!* Им достаточно было уметь умножать и делить на два, а также складывать числа.

Вот как они это делали.

Напишем одно из чисел слева, второе — справа на одной строчке. Левое число будем делить, правое — умножать на два, а результаты записывать в столбик так, как показано на рисунке 1. Если в какой-то момент придется делить на два нечетное число, остаток отбросим. Когда от левого числа останется единица, вычеркнем все тѐ строки, в которых слева стоят четные числа. Все, что осталось справа, сложим. Полученное число — произведение тех двух чисел, с которых мы начали!

Сначала я, конечно, не поверил прочитанному и честно перемножил 13 и

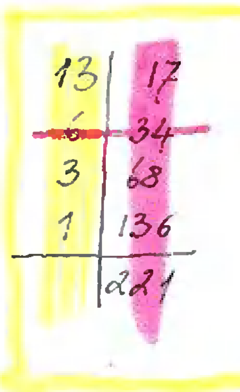


Рис. 1.

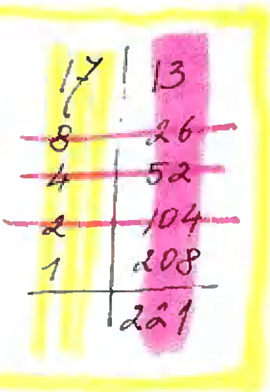


Рис. 2.

17 по предложенному рецепту. Получился правильный ответ: 221. Я поменял числа местами и перемножил их снова. Ответ не изменился — снова 221 (рис. 2).

Я отказывался верить своим глазам: уж слишком это походило на фокус вроде известных примеров неправильных действий, дающих верные результаты,— таких, как изображенное на рисунке 3 «сокращение» дробей.

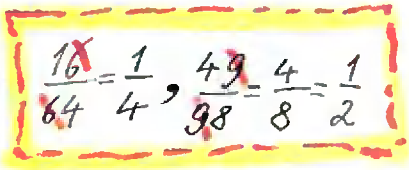


Рис. 3.

Но метод оказался абсолютно правильным!

Прежде, чем читать дальше, попробуйте таким способом перемножить несколько пар чисел, чтобы освоиться с ним и набрать некоторый запас уверенности в его справедливости. Посчитали? А теперь я покажу, что это действительно способ умножения, всегда дающий верный результат.

В двух предыдущих номерах нашего журнала были опубликованы статьи И. Яглома «Системы счисления» и «Две игры со спичками», в которых подробно рассказывалось, в частности, и о двоичной системе счисления. Всякое число в ней записывается с помощью нулей и единиц: $32=100\,000_2$, $13=1101_2$, $17=10\,001_2$. Маленький «хвостик» — цифра 2, приписанная к числу,— показывает, что это число записано в двоичной системе счисления. Расшифровываются эти записи так:

$$32=100\,000_2=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0,$$

$$13=1101_2=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1,$$

$$17=10\,001_2=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1.$$

Запишем под каждой цифрой двоичного представления числа 13 левую

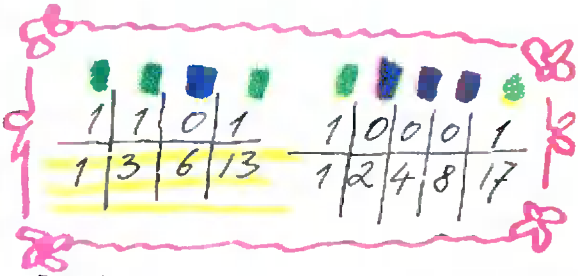


Рис. 4.

колонку чисел, получившуюся при умножении «русским крестьянским способом». То же самое проделаем и с числом 17 (рис. 4). Заметили закономерность? Да, да! Если в двоичной записи числа на некотором месте стоит 1, то под ним оказывается нечетное число, а если 0 — то четное. Попробуйте доказать это.

А я переформулирую теперь правило умножения по-крестьянски. В правом столбце записываются числа, равные второму сомножителю, умноженному на 2 в степени на единицу меньшей, чем номер строчки, в которую мы записываем это число. Затем результаты умножаются на 1, если число слева в той же строке нечетно, и на ноль, если четно. Для наглядности я предлагаю добавить еще один столбец, посередине, и записывать в него остаток от деления на два числа́, стоящего слева в той же строке (рис. 5). Таким образом, при умножении по-крестьянски происходит, по сути, перемножение построчно среднего и правого столбца, а затем сложение полученных результатов. В примере с тринадцатью и семна-

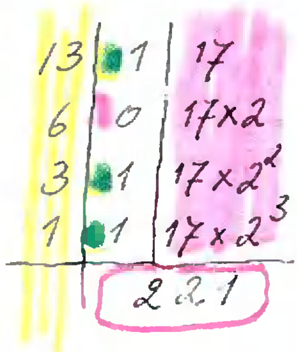


Рис. 5.

дцатью получаем:

$$17\cdot1\cdot1+17\cdot0\cdot2+17\cdot1\cdot2^2+17\cdot1\cdot2^3=17(1+0\cdot2+1\cdot2^2+1\cdot2^3)=17\cdot1101_2=17\cdot13,$$

или

$$13\cdot1\cdot1+13\cdot0\cdot2+13\cdot0\cdot2^2+13\cdot0\cdot2^3+13\cdot1\cdot2^4=13(1+0\cdot2+0\cdot2^2+0\cdot2^3+1\cdot2^4)=13\cdot10001_2=13\cdot17.$$

Выходит, русский крестьянский способ умножения основан на представлении одного из сомножителей в двоичной системе счисления? Не правда ли, просто и красиво?

Рис. 7.

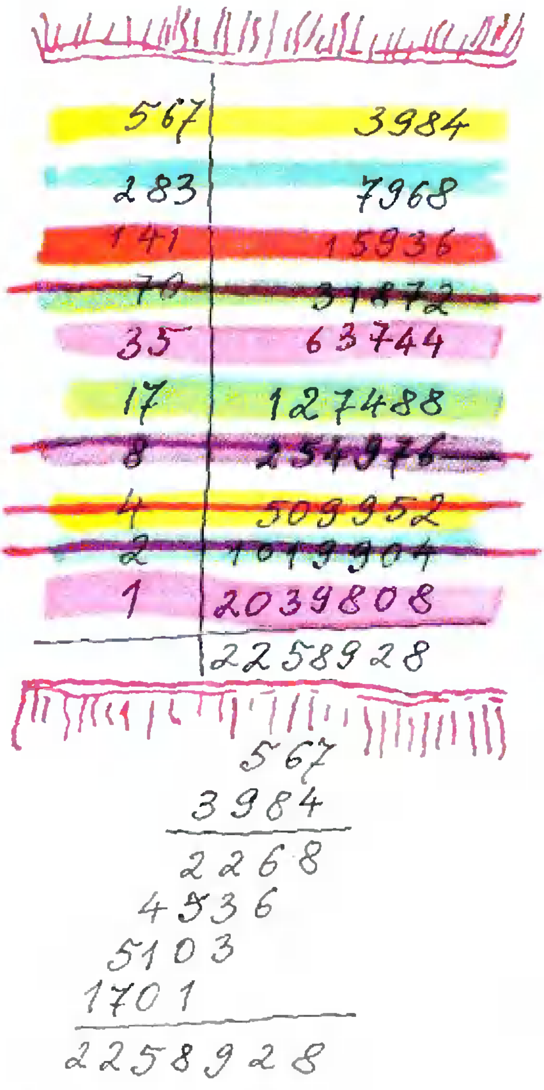


Рис. 6.

А как будет работать такой способ умножения с большими числами, скажем, такими: 567 и 3984? Посмотрим. На рисунке 6 внизу приведено привычное нам «табличное» умножение. Там приходится складывать меньше чисел, но каждое из них получено куда более сложным способом, чем в верхнем варианте на этом же рисунке. Получается, что, выигрывая в простоте вычислений, мы проигрываем во времени, так что привычное умножение, пожалуй, лучше...

«Нет! — скажут те, кто до сих пор не в ладах с таблицей умножения.— Ведь при крестьянском методе не нужно зубрить таблицу, а это кое-что значит!» В пользу таблицы умножения я приведу такой довод: пожалуй, накладно будет хватать бумагу и ручку, чтобы подсчитать, сколько стоят 8 пирожков по 70 копеек за штуку, или лезть для этого в сумку за тетрадью, на обложке которой помещена «таблица Пифагора» (рис. 7).

Она действительно такая древняя — более двух тысяч лет назад пифагорейцы умножали числа с ее помощью. (Недавно ташкентский математик А. Азамов заметил любопытное ее свойство: если четыре числа этой таблицы расположены в вершинах квадрата, центр которого — тоже число таблицы Пифагора, то число в центре квадрата равно среднему арифметическому чисел в его вершинах. Так, для чисел, выделенных на рисунке 7, имеем: $42=(25+48+63+32)/4$.)

За долгие тысячелетия развития математики было придумано множество способов умножения чисел. Итальянский математик конца XV — начала XVI веков Лука Пачиоли в своем трактате об арифметике приводит 8 различных способов умножения. Вот два из них, на мой взгляд, наиболее интересные.

В первом, который носит название «маленький за́мок», цифры верхнего числа (рис. 8), начиная со старшей, поочередно умножаются на нижнее число и записываются в столбик с добавлением нужного числа нулей, и затем результаты складываются. Преимущество этого метода перед обычным в том, что уже с самого начала определяются цифры старших разрядов, а это бывает важно при прикидочных расчетах.

Второй способ носит не менее романтическое название: «ревность» (или «решетчатое умножение»). Рисуется решетка, в которую затем вписывают результаты промежуточных вычислений (на самом деле — нужные числа из таблицы умножения). Эта решетка представляет собой прямоугольник, разбитый на квадратики, каждый из которых разделен

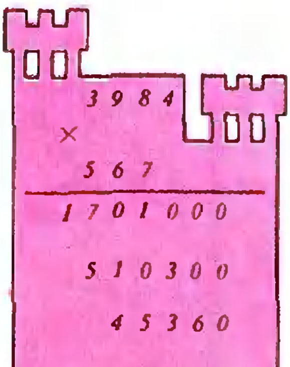


Рис. 8.

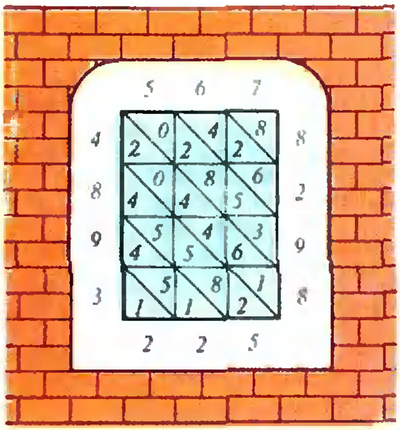


Рис. 9.

диагональю (рис. 9). «Такая решетка напоминает решетчатые ставни-жалюзи, которые вешались на венецианские окна, мешая уличным прохожим видеть сидящих у окна дам и монахинь»,— пишет Лука Пачиоли.

Перемножим этим способом числа 567 и 3984. Сверху таблицы запишем один сомножитель, а слева — другой. Затем в каждой клетке запишем произведение цифр сомножителей, стоящих с ней в одной горизонтали и в одной вертикали. Десятки записываются в левых нижних треугольниках, а единицы — в правых верхних. После заполнения таблицы складываются числа вдоль направлений проведенных диагоналей, результат записывается справа и снизу от таблицы. Этот способ хорош вычислительной простотой: клетки решетки заполняются прямо из таблицы умножения, а на долю вычислителя остается только сложение.

Остальные шесть способов, описанные Лукой Пачиоли, как и первые два, основаны на таблице умножения. Существует множество других способов умножения чисел с применением таблицы, придуманных в разное время и в разных странах. Но другого метода, кроме русского крестьянского, который обходился бы без нее, похоже, не существует.

Конкурс «Математика 6—8»

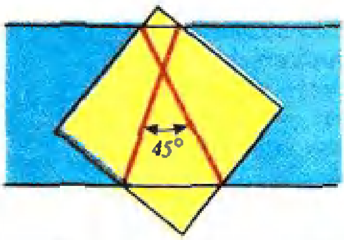
Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 задачи в каждом номере) и закончится в апреле этого года.

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 апреля 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

16. На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом так, что его граница пересекла границу полосы в четырех точках (см. рисунок). Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются под углом 45°.

В. Произволов



17. Калиф Гарун-аль-Рашид одарил троих придворных астрологов десятью кошельками. Мудрецы, сев подсчитывать доход, обнаружили, что один кошелек пуст, во втором лежит одна таньга, в третьем — две, и так далее, до десятого, в котором оказалось девять таньга. Гуссейн Гуслия взял себе два кошелька. Абдурахман ибн Хоттаб и его брат Омар Юсуф разделили оставшиеся кошельки так, что более заслуженный и умудренный годами Абдурахман получил большую сумму денег. По дороге домой на Омара Юсуфа напали разбойники и отняли четыре кошелька, так что от подарка калифа у него осталось лишь 10 таньга. Какие кошельки достались Гуссейну Гуслия?

И. Акулич

18. Имеется неограниченный запас монет в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и в 1 рубль. Известно, что сумму в A копеек можно уплатить B монетами. Докажите, что сумму в B рублей можно уплатить A монетами.

Д. Фомин

Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Вписанный четырехугольник

В этой заметке мы рассмотрим свойства вписанного четырехугольника. Напомним, что многоугольник называется *вписанным, если существует окружность, на которой лежат все его вершины*. Эта окружность называется *описанной* около многоугольника. Известно, что около любого треугольника можно описать окружность. Легко привести и пример вписанного четырехугольника — квадрат. Однако, сколько ни пытайся описать окружность около ромба, не являющегося квадратом, ничего не получится! Поэтому среди всех четырехугольников полезно выделить класс таких, около которых можно описать окружность.

С этого мы и начнем. Необходимое условие того, что около четырехугольника можно описать окружность, уже известно (А. Погорелов «Геометрия 7—11»): *сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°*. Это легко доказывается с помощью теоремы об угле, вписанном в окружность.

Докажем, что это же условие является и достаточным.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Пусть $\angle DAB+\angle DCB=180°$. Опишем окружность около треугольника ABD и покажем, что точка C также будет лежать на этой окружности. Предположим, что это не так. Тогда либо она лежит вне окружности (рис. 1, *а*), либо внутри окружности (рис. 1, *б*). Пусть прямая BC пересекает окружность в точках B и E (возможно, совпадающих, если C лежит вне окружности, а BC — касательная). Соединим точки E и D. Заметим теперь, что $\angle BED=\angle BCD$, так как, с одной стороны, четырехугольник $ABED$ — вписанный, поэтому $\angle DAB+\angle DEB=180°$, а с другой стороны, по условию, $\angle BAD+\angle BCD=180°$. Но тогда прямые DC и DE параллельны. А поскольку они имеют общую точку D, это значит, что они совпадают, т. е. совпадают и точки C и E. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

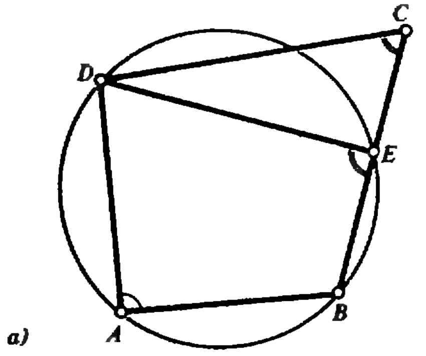
Итак, доказана

Теорема 1. *Для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов была равна 180°.*

Упражнение 1. Докажите, что около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Теперь посмотрим, где находится центр окружности, описанной около четырехугольника, если она существует. Справедливо следующее

Утверждение. *Если четырехугольник является вписанным, то центр описанной около него окружности — точка пересечения середин-*



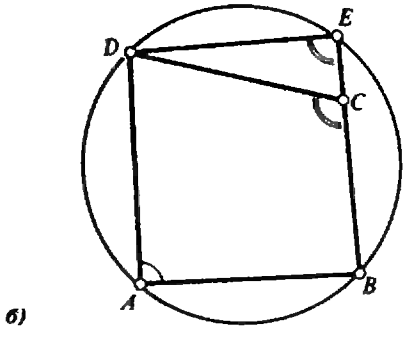


Рис. 1.

ных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.

Упражнение 2. Докажите это утверждение.

Вписанный четырехугольник обладает рядом интересных свойств. Одно из них было доказано древнегреческим математиком и астрономом Клавдием Птолемеем (ок. 100 г. н. э.— ок. 178 г. н. э.) в его знаменитом сочинении «Альмагест». Вот эта теорема, носящая ныне имя Птолемея:

Теорема 2. *Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.*

Доказательство этой теоремы было опубликовано в нашем журнале (см., например, статью «Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения» в № 4 за 1991 г.).

Упражнение 3 *(обобщенная теорема Птолемея)*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Четыре окружности касаются данной в точках A, B, C и D. Пусть a, b, c, d, e и f — длины общих внешних касательных к окружностям, касающихся данной в точках A и B, B и C, C и D, D и A, A и C, B и D соответственно. Докажите, что $ef=ac+bd$.

Другому древнему греку, Герону Александрийскому (ок. I в. н. э.), принадлежит известная формула вычисления площади треугольника через длины его сторон

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр.

Оказывается, что эта формула обобщается на случай вписанного четырехугольника, а именно справедлива

Теорема 3. *Если вписанный четырехугольник имеет длины сторон a, b, c и d, то его площадь S может быть вычислена по формуле*

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ — полупериметр четырехугольника.

Эта теорема была установлена индийским математиком Брахмагуптой (ок. 598 г. н. э.— 660 г. н. э.). До наших дней дошло его сочинение «Усовершенствованное учение Брахмы», значительную часть которого составляют математические результаты. В нем, в частности, изложены способы решения квадратных уравнений и правило суммирования арифметической прогрессии.

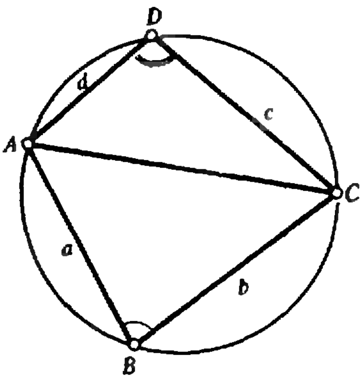


Рис. 2.

Докажем формулу Брахмагупты. Для этого разобьем четырехугольник $ABCD$ со сторонами a, b, c и d диагональю AC на два треугольника (рис. 2). По теореме косинусов

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D.$$

Так как $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle D=180°-\angle B$, а поэтому $\cos D=-\cos B$, $\sin D=\sin B$. Следовательно,

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B,$$

или

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab+cd)\cos B. \quad (1)$$

Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, на которые он разбивается своей диагональю, т. е.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B,$$

или

$$4S=2(ab+cd)\sin B. \quad (2)$$

Возведем равенства (1) и (2) в квадрат и сложим их, учитывая, что $\cos^2 B+\sin^2 B=1$. Получим, что

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=(2ab+2cd)^2.$$

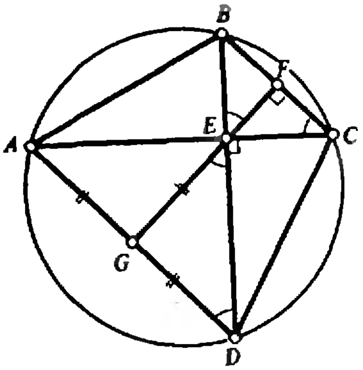


Рис. 3.

Откуда

$$16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=(2ab+2cd-(a^2+b^2-c^2-d^2))(2ab+2cd+(a^2+b^2-c^2-d^2))=((c+d)^2-(a-b)^2)((a+b)^2-(c-d)^2)=(c+d-a+b)(c+d+a-b)\times(a+b-c+d)(a+b+c-d)=(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Окончательно получаем, что

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Теорема доказана.

Упражнение 4. Докажите, что если четырехугольник со сторонами a, b, c и d вписан в окружность радиуса R, то его площадь равна

$$S=\frac{1}{4R}\sqrt{(ab+cd)(bc+ad)(ca+bd)}.$$

Рядом интереснейших свойств обладает вписанный четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Укажем некоторые из них.

Свойство 1. *Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и перпендикулярная одной из сторон, делит противоположную сторону пополам.*

Свойство 2. *Расстояние от центра описанной окружности до любой из сторон равно половине противоположной стороны.*

Свойство 3. *Сумма квадратов сторон равна увосьмеренному радиусу описанной окружности.*

Свойство 4. *Ломаная, вершинами которой являются две противоположные вершины четырехугольника и центр описанной окружности, делит площадь четырехугольника пополам.*

Докажем свойство 1. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, и прямая l проходит через точку E пересечения диагоналей и перпендикулярна стороне BC. Точки пересечения ее со сторонами BC и AD обозначим через F и G (рис. 3). Тогда $\angle BCA=\angle BDA$, $\angle BCA=\angle BEF$, $\angle BEF=\angle GED$. Поэтому $\angle GED=\angle BDA$, т. е. EGD — равнобедренный треугольник. Аналогично и AEG — равнобедренный треугольник, т. е. $AG=GE=GD$.

Упражнение 5. Докажите свойства 2, 3 и 4.

В заключение предлагаем решить еще несколько задач, связанных со вписанным четырехугольником.

Задачи

1. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, продолжения сторон которого пересекаются в точках E и K. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AED и AKB со сторонами четырехугольника $ABCD$ являются вершинами ромба.

2. Пусть P, Q и M — соответственно точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника и продолжений его противоположных сторон. Докажите, что центр окружности, описанной около этого четырехугольника, совпадает с точкой пересечения высот треугольника PQM.

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Из вершин A и B опущены перпендикуляры на сторону CD, пересекающие диагонали в точках K и M. Докажите, что $AKMB$ — ромб.

4. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Перпендикуляр к AB, восставленный в точке A, пересекает прямую CD в точке M, а перпендикуляр к AD, восставленный в точке A, пересекает прямую BC в точке N. Докажите, что MN проходит через центр описанной окружности.

5. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то произведение расстояний от точки, лежащей на этой окружности, до двух противоположных сторон равно произведению расстояния от этой точки до двух других сторон, а также произведению расстояний от той же точки до диагоналей.

Д. Терёшин

А так ли хорошо знаком вам

магнетизм ?

Таким образом, все магнитные явления я свел к чисто электрическим действиям.

А.-М. Ампер

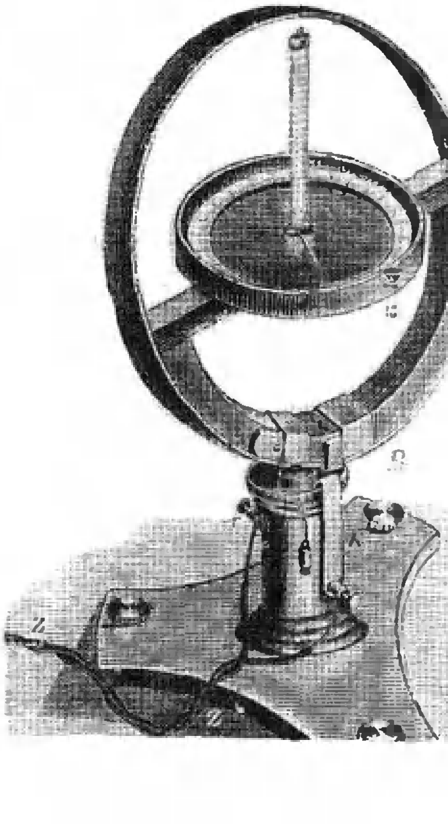
Так как я уже давно рассматривал силы, проявляющиеся в электрических явлениях всеобщими природными силами, то я должен был отсюда вывести и магнитные действия.

Х. Эрстед

В конце лета 1820 года редакции научных журналов, физические общества и некоторые видные физики Европы получили из Копенгагена небольшую — всего в 4 страницы — брошюру на латинском языке. Автором ее был датчанин Х. Эрстед, а называлась она «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку». В брошюре сообщалось об опытах по воздействию на магнитную стрелку электрического тока, текущего по проволоке, замыкающей вольтову батарею.

Тщательное исследование поведения собственно магнитов было проведено еще У. Гильбертом на рубеже XVI и XVII веков. Но идея связи магнитных и электрических явлений, если и приходила кому-то в голову, экспериментального подтверждения долгое время не получала. Открытие Эрстеда послужило началом цепной реакции исследований и величайших достижений в области электромагнетизма, повлекших через полстолетия мощный технический переворот. И здесь нельзя не назвать имена А.-М. Ампера, М. Фарадея, Д. Араго, Э. Ленца, Д. Максвелла...

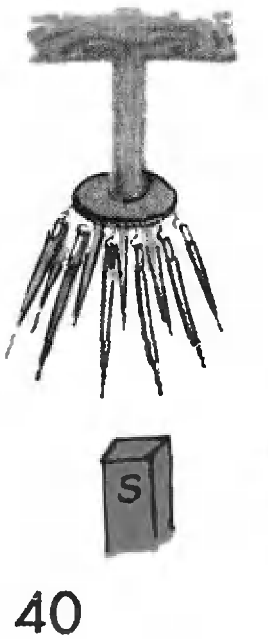
Эти странички нашего «Калейдоскопа» — всего лишь крохотное окошко в мир электромагнетизма, причем сегодня нас будет интересовать только его «магнитная сторона».



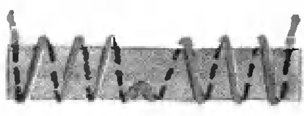
Вопросы и задачи

1. Имеются два одинаковых стальных стержня, один из которых намагничен. Как узнать, какой из них намагничен, не пользуясь ничем, кроме самих стержней?

2. К небольшому латунному диску свободно подвесили несколько стальных иголок, как показано на рисунке. Если снизу к иголкам медленно подносить сильный магнит (например, южным полюсом), то сначала иголки разойдутся, а затем, когда магнит приблизится почти вплотную, снова вернутся в вертикальное положение. Почему?



3. Намагнитится ли однородный железный стержень, если пропустить ток через катушку, намотанную на стержень так, как изображено на этом рисунке?



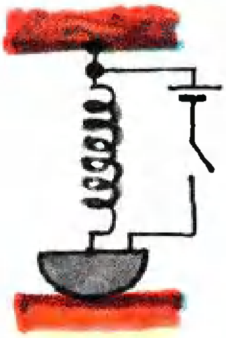
4. Незаряженное металлическое кольцо охладили до сверхпроводящего состояния и начали быстро вращать. Возникнет ли вокруг этого кольца магнитное поле?

5. К двум противоположным точкам проволочного кольца подведены идущие радиально провода, со-

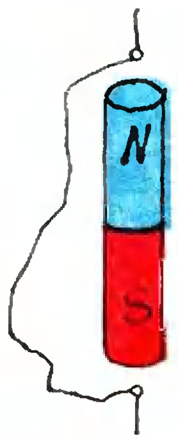
единенные с весьма удаленным источником тока. Чему равна индукция магнитного поля в центре кольца?

6. Отчего два параллельных проводника, по которым идут токи в одном направлении, притягиваются, а два параллельных катодных пучка отталкиваются?

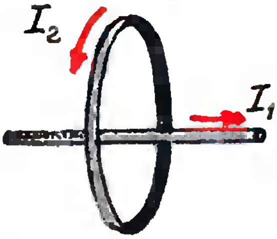
7. Один конец проводящей пружины закреплен, а другой погружен в чашечку со ртутью. Почему при пропускании тока проводник то сокращается, размыкая цепь, то удлиняется, вновь замыкая ее?



8. Около сильного длинного прямолинейного магнита помещают гибкий свободный проводник. Как расположится проводник, если по нему пропустить ток, направленный сверху вниз?



9. Прямолинейный ток I_1 проходит по оси кругового тока I_2. С какой силой взаимодействуют эти токи?

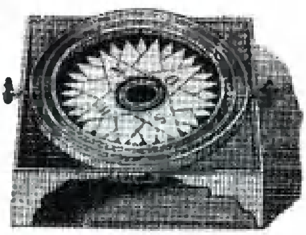


10. Две катушки, по которым текут токи, взаимодействуют между собой с определенной силой. Как изменится эта сила, если обе катушки свободно надеть на общий замкнутый железный сердечник?

11. Картина линий индукции магнитного поля Земли выглядит, как показано на рисунке. Какой формы электрический ток мог бы создать магнитное поле такой же конфигурации?

Микроопыт

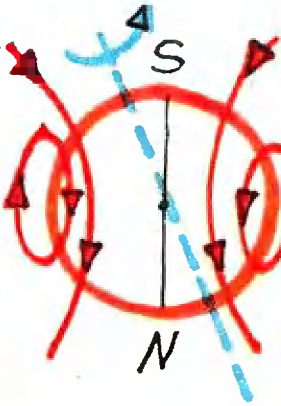
Прикрепите магнитную стрелку к пробке и опустите в воду. Как будет вести себя стрелка под действием лишь магнитного поля Земли? А если к ней поднести полюс постоянного магнита?



Любопытно, что...

... большинство китайских мудрецов объясняли в древности поведение магнитной стрелки действием внеземных сил, например притяжением конца стрелки Полярной звездой.

... безразличное отношение физиков в начале XIX века к вопросу о магнитном действии постоянного тока объяснялось тем, что «скрытое», незримо текущее «вольтово электричество» считалось особым, «тихим» состоянием электричества, неспособным на магнитное воздействие, наблюдаемое при бурном искровом электрическом разряде.



...как это случается, сам Эрстед дал открытому им явлению неверное толкование, считая, что воздействие на магнитную стрелку является результатом нагревания проводника током.

... уже в первом докладе Ампера, состоявшемся менее чем через два месяца после выхода в свет брошюры Эрстеда, содержалась его революционная теория, ликвидирующая представление о невесомых магнитных субстанциях, считавшееся неоспоримым на протяжении более тридцати лет.

... в прошлом веке была широко распространена точка зрения на хорошо знакомые нам линии индукции магнитного поля как на натяжения эфирной материи.

... многие небесные тела — планеты и звезды — обладают собственными магнитными полями. Однако наши ближайшие соседи — Луна, Венера и Марс — не имеют поля, подобного земному. Магнитное же поле Земли «непостоянно» — его полюса «гуляют» со скоростью 5—6 километров в год; это явление называют вековой вариацией магнитного поля.

... палеомагнитные исследования — самое строгое доказательство дрейфа континентов. По намагниченности железных месторождений, возникших несколько сот миллионов лет назад, можно «восстановить» некогда существовавший в Южном полушарии единый гигантский суперконтинент Гондвану, который позже раскололся на Южную Америку, Африку, Азию (частично), Австралию и, возможно, Антарктиду.

Что читать о магнетизме в «Кванте»
(публикации последних лет)

1. «Пути электромагнитной теории» — 1988, № 2, с. 2;
2. «Полярные сияния» — 1989, № 5, с. 58;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1990, № 4, с. 40;
4. «Сила Ампера в однородном магнитном поле» — 1991, № 5, с. 39.

Материал подготовил А. Леонович

Опыты с вращающейся жидкостью

Н. БУРЛАКИ

Из кувшина вылить можно только то,
что было в нем.
Ш. Руставели

Эксперименты с вращающейся жидкостью демонстрируют сложные пространственные движения, порой — очевидные, но необъяснимые, порой — невероятные, но поучительные. Большинство из них можно провести в школьной физической лаборатории или в домашних условиях.

Буря в стакане воды. Почему чаинки собираются в центре стакана после того, как их раскрутили ложкой? Этот вопрос занимал даже Альберта Эйнштейна, которому и приписывают авторство опыта с чаинками. Не исключено, что здесь сработал «эффект громкого имени» и авторство в объяснении ранее известного явления действительно было приписано выдающемуся ученому, но теперь мы не можем с уверенностью сказать, что же было на самом деле. В любом случае объяснение Эйнштейна, опубликованное в 1926 году на страницах журнала «Naturwissenschaften», заслуживает того, чтобы привести его здесь: «Я начну с небольшого эксперимента, который каждый может легко повторить. Представим себе чашку с плоским дном, полную чая. Пусть на дне ее имеется несколько чаинок, которые остаются там, так как оказываются тяжелее вытесняемой ими жидкости. Если с помощью ложки привести во вращение жидкость в чашке, то чаинки быстро соберутся в центре дна сосуда. Объяснение этого явления заключается в следующем... Слои жидкости, находящиеся по соседству со стенками чашки, задерживаются благодаря трению, так что угловая скорость вращения... будет вблизи дна меньше, чем вдали от него. Результатом этого явится круговое движение жидкости, которое возрастает до тех пор, пока под влиянием трения не станет стационарным. Чаинки сносятся в центр круговым движением, что и доказывает его существование».

В своем письме к Эйнштейну один из основоположников квантовой механики Э. Шредингер, называя это объяснение «очаровательным», не удержался от весьма нестандартного комплимента основателю теории относительности: «Случайно, несколько дней тому назад, моя жена расспрашивала меня о «феномене чашки чая», но я не сумел дать разумное объяснение. Она говорит, что теперь никогда не сможет перемешивать чай, не вспоминая Вас».

Но вернемся непосредственно к опыту с чаинками. Хотя точного расчета движения чаинок не имеется, качественные соображения просты. «Мокрые» чаинки, плотность которых больше плотности воды, находятся на дне стакана и поэтому при своем движении испытывают силу трения о стекло. Вращаются они не в центре сосуда, а вблизи него, образуя как бы «пояс астероидов». Ширина «пояса»

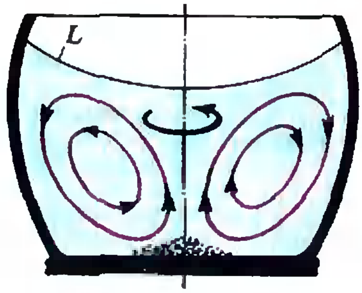


Рис. 1.

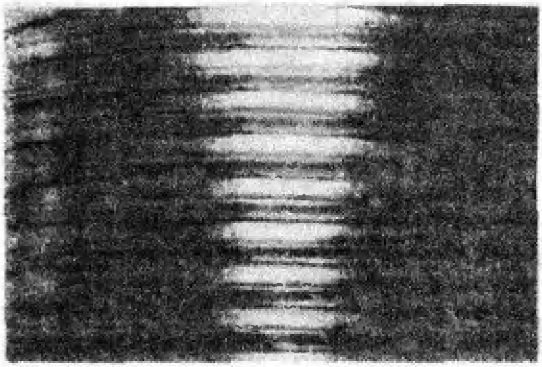
зависит от степени неоднородности чаинок: чаинки разных размеров и масс вращаются по окружностям разных радиусов. Лишь на заключительной стадии торможения они собираются в центре. Этому способствуют восходящие вблизи оси сосуда токи, показанные на рисунке 1 красными линиями и образующиеся вследствие того, что при уменьшении скорости вращения свободная поверхность L, имевшая форму параболоида вращения, стремится стать снова плоской. Чаинки увлекаются придонным потоком, направленным к оси сосуда.

«Опыт» с чаинками мы проводим каждый день, но не обращаем на их поведение особого внимания. Давайте проведем этот столь хорошо знакомый нам опыт еще раз и попытаемся выяснить, как ведут себя в процессе движения и на его заключительной стадии не только те чаинки, которые находятся на дне стакана, но и те, которые плавают внутри объема и на поверхности воды («сухие» чаинки). Вместо чаинок можно взять другие частицы, желательно калиброванные. Воду можно раскрутить ложкой, оставляя стакан неподвижным. Возможен и другой способ «закручивания» жидкости — можно раскрутить стакан просто в ладонях (при достаточной ловкости) или поставив его на середину вращающегося диска проигрывателя.

Итак, возможны следующие варианты проведения опыта с чаинками: фиксировать их положение во время вращения или после него, раскручивать чай или стакан и, наконец, наблюдать за придонными, поверхностными или плавающими внутри объема частицами. Всего $2\times2\times3=12$ комбинаций. Впрочем, существует много других вариантов этого на вид простого, а по своей природе чрезвычайно сложного опыта.

Вихри Тейлора. Не менее интересно наблюдать за поведением жидкости, находящейся между двумя коаксиальными цилиндрами. Течение жидкости, вызванное вращением одного или обоих цилиндров, представляет собой сложное гидродинамическое явление. При малой скорости вращения (малой закрутке) течение в любой горизонтальной плоскости одинаково, т. е. не зависит от вертикальной координаты. С увеличением закрутки возникают так называемые ламинарные (упорядоченные) вихри Тейлора. Фотография вихрей Тейлора при течении машинного масла в зазоре между неподвижным стеклянным и вращающимся металлическим цилиндрами приведена на рисунке 2 слева. Для визуализации течения в масло добавлен алюминиевый порошок. Схема течения дана на рисунке 3, направление движения частиц показано стрелками.

С дальнейшим ростом скорости вращения появляется периодическое искривление вихрей Тейлора. Наконец, при еще большей скорости на периодическое течение наклады-



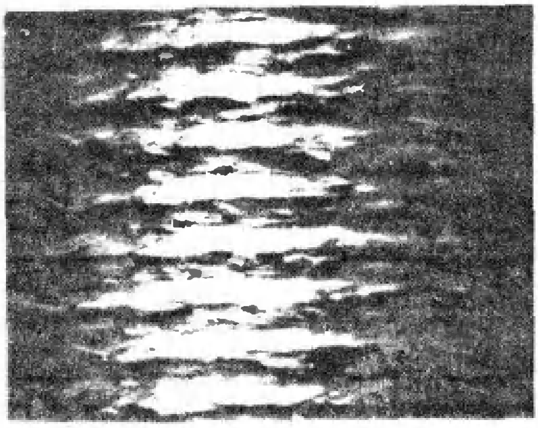


Рис. 2.

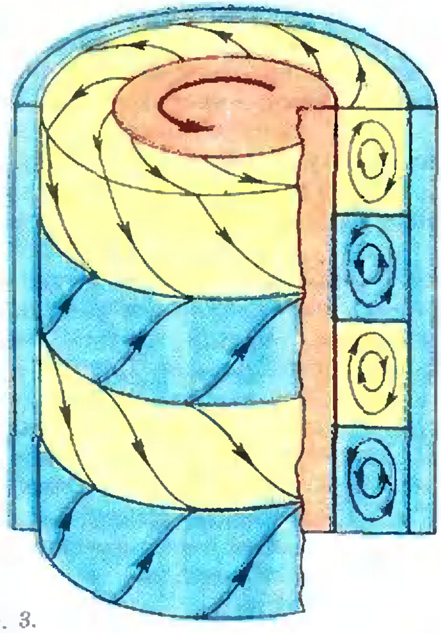


Рис. 3.

вается хаотическое движение (рис. 2, справа). Такие вихри *называют турбулентными*.

Закрученные потоки. В 1931 году было открыто неожиданное явление, заключающееся в следующем. В специальной камере, имеющей круглое выходное отверстие, закручивают воздух, сжатый до 10 атмосфер. По выходе из отверстия температура воздуха на оси и на периферии оказывается различной. Если на периферии воздух комнатной температуры, то на оси его температура падает до минус 200 градусов Цельсия! Это явление называется эффектом Ранка. В настоящее время природа этого явления до конца не выяснена, хотя исследованию эффекта Ранка посвящается много работ, созываются специальные симпозиумы. Поиск продолжается...

Поскольку эффект Ранка в условиях школьной лаборатории наблюдать нельзя, так как для его осуществления нужна специальная камера, проведем эксперимент, легко воспроизводимый даже в домашних условиях и чем-то напоминающий опыт Ранка. Этот опыт демонстрирует взаимодействие вращательного и поступательного движений жидкости, вытекающей из вращающегося сосуда (рис. 4).

Предлагаемый эксперимент можно поставить следующим образом. Сосуд с водой укрепите на подшипниках так, чтобы он мог свободно вращаться вокруг своей оси, раскрутите его, а затем снимите крутящие усилия и одновременно откройте сток в дне. После этого скорость вращения сосуда начнет заметно возрастать.

Форма свободной поверхности в этом опыте зависит от скорости вращения и от высоты жидкости H в сосуде. Если скорость вращения мала или велико значение H, на свободной поверхности образуется небольшая впадина (рис. 5). С увеличением скорости вращения или с уменьшением H вихрь достигает дна сосуда, а затем проникает в вытекающую из отверстия струю. Подобные воронки можно наблюдать в реках, при спуске воды в ванной.

Взрыв вихря. В 1957 году американские ученые Пекхем и Аткинс обнаружили необычное явление — внезапное разрушение спиральных вихрей (взрыв вихря), сходящих с боковых кромок самолетного крыла. Наблюдать этот необычный эффект можно только в условиях научно-исследовательской лаборатории, поэтому мы лишь расскажем об этом интересном явлении и приведем его фотографии.

Модель треугольного крыла самолета устанавливают в потоке жидкости (или воздуха) под некоторым углом к направлению течения. С нижней плоскости крыла частицы жидкости устремляются на верхнюю, где давление меньше, и движутся по потоку вдоль крыла, образуя отходящие от его боковых кромок спиральные вихри. Почти прямые оси вихрей (визуализированные с помощью впрыскиваемой вблизи вершины крыла жидкой краски) искривляются, обретая нерегулярную форму (рис. 6).

Это во многом загадочное явление изучают в специальных вихревых камерах, где поток воды закручивается искусственным образом, на-

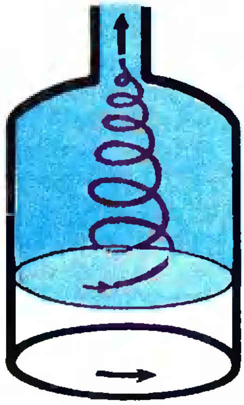


Рис. 4.

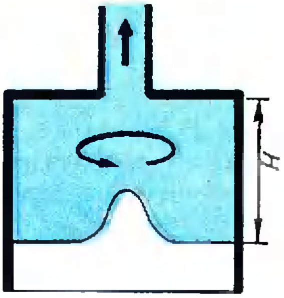


Рис. 5.

пример лопастями вентилятора (в данном случае модель крыла отсутствует), а по оси камеры вводится краска. При малой скорости вращения потока образуется спиральная структура, фотография которой показана на рисунке 7 вверху; при большой скорости осевая линия приобретает «пузыревидную» форму (рис. 7, внизу). Таковы два основных типа взрыва вихря.

Наблюдение пророчицы Деборы. Не только в опытах с вращающейся жидкостью, но и в любых других ситуациях, где проявляется влияние вязкости, следует различать два типа жидкостей: ньютонову и неньютонову.

Жидкости и газы, состоящие из «легких» молекул с относительными молекулярными массами не более 1000, называют ньютоновыми. К ним относятся воздух и вода при наших земных условиях. Классическая гидродинамика описывает движение ньютоновой жидкости.

«Тяжелые» жидкости — неньютоновы — состоят из огромных молекул, каждая из которых представляет собой цепь из большого числа повторяющихся звеньев. Примером являются полимерные жидкости, молекулярная масса которых 10^5—10^8: растворы синтетических и биологических полимеров и неразбавленные полимеры, называемые «расплавами». Сюда относятся полиэтилен $(-CH_2-)_n$, полистирол $(-CH_2-CH(C_6H_5)-)_n$, натуральный каучук $(-CH_2-C(CH_3)=CH-CH_2-)_n$ и т. д. (Здесь n — очень большое число порядка 10^3—10^6.)

Неньютоновы жидкости обладают рядом особенностей. Например, они имеют память. Дело в том, что время, характерное для процесса перестройки длинных молекул, может превышать время наблюдения за течением жидкости. Течение не успевает перестроиться, имеет место эффект запаздывания, а значит, эффект памяти.

Как утверждает библейская мифология, пророчица Дебора изрекла, что пред Богом текут даже горы. Она первая подметила аналогию между поведением жидких и твердых тел.

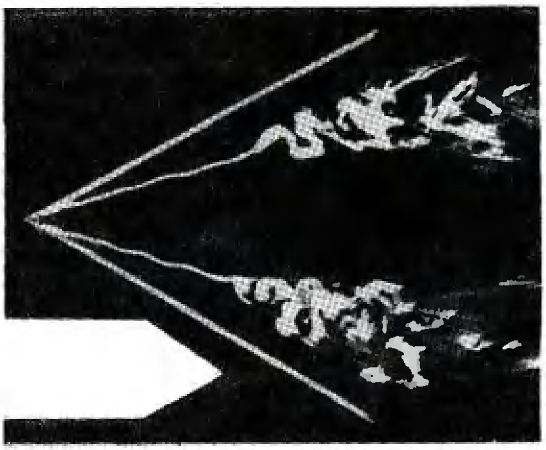


Рис. 6.

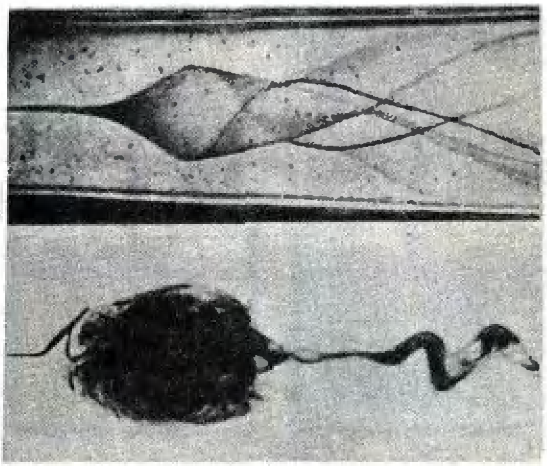


Рис. 7.

Но что самое важное — Дебора ясно выразила идею разных временных масштабов. За время своей жизни человек не заметит уменьшения горы — оно незначительно. А по временной шкале Бога горы текут! Ученые часто шутят — юмор помогает им в трудной работе. Числом Деборы они назвали отношение характерного времени «настройки» молекул к времени наблюдения. Когда число Деборы велико, жидкость ведет себя подобно твердому телу. При малых числах Деборы жидкость ведет себя как ньютонова. В промежуточном случае, когда число Деборы порядка 1, жидкость обладает рядом аномальных свойств.

Удивительные свойства неньютоновых жидкостей. Двигаясь в трубе, жидкость испытывает силу трения о ее поверхность, в результате чего кинетическая энергия переходит в тепловую. Поэтому снижение силы трения является важной технической проблемой. Как оказалось, добавление в жидкость малого количества полимера значительно снижает силу трения. Это удивительное и до конца не понятое явление называется эффектом Томса. Всего лишь 20 миллионных долей полиокса (длинноцепочного полимера) могут снизить силу трения турбулентного потока в трубе на 50 %!

В 50-е годы американские пожарные начали добавлять полимерные добавки в жидкость, вытекающую из брандспойта, при этом длина струи увеличивалась в полтора раза. Полимерные добавки в смазывающих материалах повышают ресурсы станков и приборов. Можно увеличивать скорость судна путем впрыскивания вблизи его носовой части малых количеств полимерного раствора. Имеется гипотеза, что дельфины и другие обитатели морей и океанов тоже «используют» эффект Томса для уменьшения гидродинамического сопротивления.

Теперь, подготовленные к неожиданностям, снова перейдем к теме нашей беседы — опытам с вращающейся жидкостью. Сравним, как поведут себя ньютоновы и неньютоновы жидкости, оказавшись в одинаковых условиях. В наших опытах в качестве ньютоновой жидкости можно использовать воду, а неньютоновой — подсолнечное масло.

Вставьте во вращающийся стакан с водой неподвижный стержень, ось которого совпадает с осью стакана. Свободная поверхность не утратит форму параболоида вращения. Если же вместо воды взять подсолнечное масло, то жидкость поднимется в центре стакана. Свободная поверхность уже не будет параболоидом. Опыт можно изменить: вращать не стакан, а стержень. Эффект будет тот же самый. Подобная картина возникает, если убрать стержень, а на дно стакана поместить вращающийся диск. Свободная поверхность ньютоновой жидкости в центре опускается, неньютоновой — поднимается.

Если вращающийся диск разместить на поверхности жидкости, то наряду с первичным потоком, скорость которого направлена по касательной к диску, возникнет вторичный поток в меридиональном направлении (красные линии на рисунке 8). В ньютоновой (*а*) и неньютоновой (*б*) жидкостях направления вторичного течения противоположны.

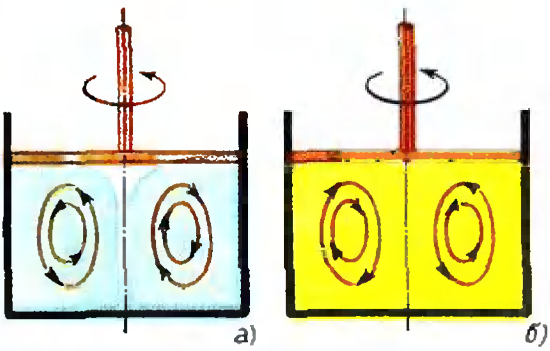


Рис. 8.

Практикум абитуриента

Что покажет динамометр?

Кандидат физико-математических наук
А. АФОНИН,
кандидат физико-математических наук
В. КАПШАЙ,
М. КАПШАЙ,
кандидат физико-математических наук
В. ШОЛОХ

Задачи о показаниях измерительных приборов часто кажутся простыми. Дело, вероятно, в том, что, когда вводится новая физическая величина, всегда сразу же дается рецепт, с помощью какого устройства и как именно следует эту величину измерять. В дальнейшем, считая вопрос исчерпанным, к тонкостям процесса измерения возвращаются редко.

Это относится и к измерениям с помощью простейших приборов, например — пружинного динамометра.

Хорошо известно, что если к обоим концам динамометра приложены одинаковые по модулю силы F_0, то динамометр покажет именно это значение силы. При этом пружина динамометра растянется, и ее абсолютное удлинение Δl_0 определится соотношением $F_0=k\Delta l_0$, где k — жесткость пружины. Вроде бы все просто. Но...

Задача 1. *За один конец пружинного динамометра тянут с силой $F_1=50$ Н, за другой — с силой $F_2=70$ Н. Что покажет динамометр?*

На вопрос этой задачи отвечают обычно, что динамометр покажет либо F_2, либо F_1. Встречаются также ответы F_2+F_1 и F_2-F_1. На самом деле ни один из этих ответов не является верным. А что же верно? Об этом — чуть позже.

С помощью пружинного динамометра можно также определить массу m тела, поскольку нетрудно измерить силу тяжести, равную mg. Вроде бы тоже все просто. Однако...

Задача 2. *Как определить массу пружины динамометра, имея в своем распоряжении только этот динамометр?*

Оказывается, обе сформулированные задачи тесно связаны друг с другом, хотя на первый взгляд это может показаться и странным. Скоро вы в этом убедитесь. Но прежде рассмотрим еще одну, несколько более простую задачу и решим ее.

Задача 3. *За один конец динамометра тянут с силой, равной F. Что покажет динамометр?*

Для начала попытаемся четко понять, что означает этот вопрос.

Ясно, что, глядя на динамометр, мы можем сказать только, растянулась его пружина или нет и если растянулась, то на сколько. Мы можем также измерить величину абсолютного удлинения пружины в единицах длины, например в сантиметрах. Определить же значение силы можно лишь после предварительной градуировки шкалы динамометра в единицах силы, например в ньютонах, с помощью закона Гука.

Очень важными являются также следующие два условия: 1) во время измерения динамометр покоится в не-

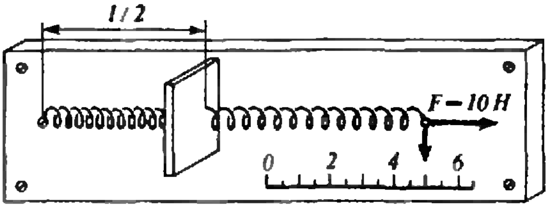


Рис. 1.

которой инерциальной системе отсчета; 2) пружина динамометра растягивается равномерно по всей длине. Проще всего эти два условия обеспечиваются равенством сил, действующих на оба конца пружины динамометра. В важности второго условия нетрудно убедиться с помощью следующего рассуждения. Допустим, мы закрепили одну половину пружины (соединенную со шкалой) так, что она вообще не будет деформироваться и перемещаться, а за свободный конец второй половины пружины тянем с силой F (рис. 1). Что в этом случае покажет динамометр? Очевидно, половина пружины под действием силы F удлинится на столько же, на сколько удлинится вся пружина под действием силы $F/2$. Таким образом, стрелка динамометра покажет силу $F/2$.

Итак, если сила натяжения постоянна вдоль пружины и равна F, динамометр покажет F. Если же сила натяжения равна нулю на одной половине пружины и F на другой, динамометр покажет $F/2$. А что если сила натяжения будет изменяться вдоль пружины еще каким-нибудь, более сложным образом? Какой будет суммарная деформация всей пружины (ведь именно она «ответственна» за показание стрелки динамометра)? Как, наконец, создать неравномерную силу натяжения, не закрепляя части пружины?

Оказывается, в условиях задачи 3 реализуется именно такая ситуация. Так что же происходит, если сила F действует только на один конец динамометра?

Во-первых, динамометр движется и движется равноускоренно (других сил нет). Его ускорение равно $a=F/m$, где m — масса пружины. При таком движении взаимное расположение точек пружины не изменяется со временем. Можно сказать, что пружина движется как твердое тело (при условии, разумеется, что возможные продольные колебания быстро затухают). При этом взаимное расположение точек движущейся пружины может, конечно, отличаться от их расположения в неподвижном состоянии.

Во-вторых, различные участки пружины будут деформироваться по-разному, поскольку сила натяжения будет изменяться вдоль пружины. Определим эту силу, считая, что пружина расположена горизонтально и сила F действует на ее правый конец.

Для дальнейшего удобства «пронумеруем» точки (витки) пружины с помощью непрерывно изменяющейся величины x следующим образом (рис. 2). Вместо того, например, чтобы говорить «точка пружины, которая находится на расстоянии x от левого конца пружины в недеформированном состоянии», будем говорить кратко «точка x». Очевидно, что x изменяется в пределах от 0 до l, где l — длина недеформированной пружины. Силу натяжения в точке x обозначим $F(x)$; при этом понятно, что $F(0)=0$ и $F(l)=F$. Заметим, что масса участка пружины от точки 0 до точки x равна $m_x=mx/l$. Для того чтобы этот участок двигался с ускорением $a=F/m$, необходимо, чтобы на него со стороны остальной части пружины действовала сила — сила натяжения в точке x —

$$F(x)=m_x a=\frac{mx}{l}\,\frac{F}{m}=\frac{F}{l}x.$$

Эта сила линейно зависит от параметра точки пружины x (рис. 3).

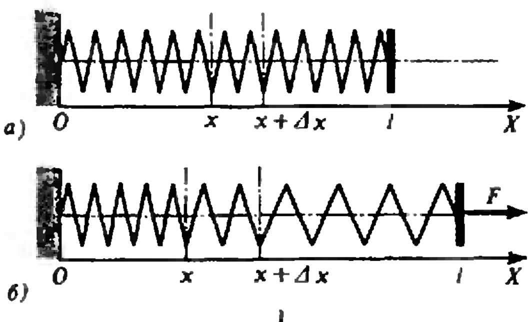


Рис. 2.

Теперь задача сводится к тому, чтобы, зная силу натяжения в каждой точке пружины, определить деформацию всей пружины. Для этого поступим так. Выделим малый (по сравнению с l) участок недеформированной пружины между точками x и $x+\Delta x$ (рис. 2, *а*). Длину этого участка Δx будем обозначать также b. На левый конец этого участка действует сила натяжения $F(x)=Fx/l$, на правый — сила натяжения $F(x+\Delta x)=F(x+b)/l$. Равнодействующая этих сил, направленных в разные стороны, равна Fb/l. Поскольку масса выделенного участка есть mb/l, он движется с ускорением, равным F/l, т. е. с ускорением всей пружины.

Так как силы Fx/l и $F(x+b)/l$ отличаются на малую (по сравнению с ними) величину Fb/l, можно считать, что участок Δx растягивают в обе стороны с силой Fx/l, под действием которой он деформируется. Найдем величину абсолютного удлинения этого участка.

Если бы на оба конца пружины действовала сила F_0, в каждой точке x сила натяжения также равнялась бы F_0, и пружина была бы растянута равномерно. Абсолютное удлинение всей пружины было бы равно

$$\Delta l_0=\frac{F_0}{k},$$

где k — жесткость пружины, а относительное удлинение —

$$\frac{\Delta l_0}{l}=\frac{F_0}{kl}.$$

При этом относительное удлинение любого участка было бы таким же.

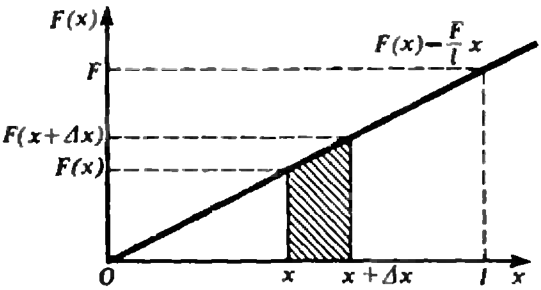


Рис. 3.

Например, для участка длиной b

$$\frac{\Delta b}{b}=\frac{F_0}{kl}.$$

В случае же, когда сила натяжения зависит от x, относительное удлинение участка длиной b будет другим:

$$\frac{\Delta b}{b}=\frac{F(x)}{kl}.$$

Это означает, что участки возле правого конца пружины растягиваются больше, возле левого — меньше (см. рис. 2, *б* и рис. 4). Абсолютное удлинение этого участка есть

$$\Delta b=\frac{F(x)}{kl}b=\frac{1}{kl}F(x)\Delta x.$$

Заметим, что величина абсолютного удлинения участка Δx, с точностью до постоянного коэффициента $1/(kl)$, равна площади прямоугольника со сторонами $F(x)$ и Δx или $F(x+\Delta x)$ и Δx (см. рис. 3). Ясно, что в пределе (для бесконечно малых Δx) силы $F(x)$ и $F(x+\Delta x)$ совпадают, а площади указанных прямоугольников равны как между собой, так и площади заштрихованной на рисунке 3 трапеции.

Для того чтобы найти абсолютное удлинение всей пружины, разделим ее на n кусков малой длины точками $x_1=0, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}=l$. Будем считать, что $\Delta x_i=(x_{i+1}-x_i)\ll l$ (n велико). Абсолютное удлинение i-го участка выразится формулой

$$\Delta l_i=\frac{1}{kl}F(x_i)\Delta x_i,$$

а абсолютное удлинение всей пружины —

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=\frac{1}{kl}\sum_{i=1}^{n}F(x_i)\Delta x_i.$$

Устремим теперь длину каждого участка к нулю (а их число к бесконечности). Тогда получим

$$\Delta l=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{1}{kl}\sum_{i=1}^{n}F(x_i)\Delta x_i.$$

Ясно, что эта сумма, с точностью до коэффициента $1/(kl)$, равна сумме площадей трапеций, подобных заштрихованной на рисунке 3, а ее предел — площади прямоугольного треугольника с катетами F и l. Следовательно,

$$\Delta l=\frac{1}{kl}\frac{Fl}{2}=\frac{F}{2k}.$$

Для тех, кто знаком с понятием определенного интеграла, запишем

$$\Delta l=\frac{1}{kl}\int_0^l F(x)dx=\frac{1}{kl}\int_0^l \frac{Fx}{l}\,dx=\frac{F}{2k}.$$

Итак, абсолютное удлинение Δl всей пружины, на один конец которой действует сила F, найдено. Можно сказать, что это удлинение будет таким же, если на оба конца динамометра действует так называемая эффективная сила $F_{эф}=k\Delta l=F/2$. Но, как уже говорилось, если на оба конца динамометра действуют одинаковые силы, динамометр показывает именно ее. Таким образом, если на один конец динамометра действует сила F, то динамометр показывает силу $F/2$ (и движется равноускоренно). При этом заметим, что показание динамометра не зависит ни от массы m пружины, ни от ее длины l в свободном состоянии, ни от жесткости k.

Разобравшись с задачей 3, вернемся к задаче 1. Если на правый конец динамометра действует сила F_2, а на левый F_1, то пружина движется с ускорением $a=(F_2-F_1)/m$. Для участка пружины от 0 до x имеем

$$F(x)-F_1=m_x a=\frac{mx}{l}\,\frac{F_2-F_1}{m},$$

следовательно, сила натяжения в точке x равна

$$F(x)=F_1+\frac{F_2-F_1}{l}x.$$

Абсолютное удлинение можно найти с помощью тех же рассуждений, что и раньше. Так, с одной стороны, абсолютное удлинение пружины равно площади заштрихованной на рисунке 5 трапеции (деленной на kl). С другой стороны, его можно выразить в виде интеграла:

$$\Delta l=\frac{1}{kl}\int_0^l\left(F_1+\frac{F_2-F_1}{l}x\right)dx=\frac{F_2+F_1}{2k}.$$

Таким образом, динамометр, на концы которого действуют различные силы F_1 и F_2, растягивается так, как если бы на оба его конца действовала одна и та же сила $F_{эф}=k\Delta l=(F_1+$ $+F_2)/2$. Другими словами, динамометр показывает (независимо от величин m, l и k) силу, равную полусумме F_1 и F_2, и движется при этом равноускоренно. В частном случае, когда $F_1=0$, мы получим результат задачи 3: $F_{эф}=F_2/2$. В другом частном случае, когда $F_1=F_2=F$, имеем $F_{эф}=F$, т. е. когда силы, действующие на оба конца динамометра, одинаковы, динамометр, как и должно быть, показывает именно эту силу и покоится.

Теперь рассмотрим задачу 2. Так можно ли сделать какие-нибудь измерения с помощью одного только динамометра? Оказывается, можно. Сначала расположим динамометр горизонтально и убедимся, что его стрелка находится на нулевом делении. Затем расположим динамометр вертикально, держа за верхний конец пружины, который прикреплен к шкале. В таком положении стрелка динамометра (нижний конец пружины) покажет не ноль — пружина растянется под действием силы тяжести. Но на сколько? Что же теперь покажет динамометр?

Заметим, что в вертикальном положении на концы пружины действуют различные силы. На верхнем конце сила натяжения пружины равна mg, где m — масса пружины, на нижнем сила натяжения равна нулю. Кроме того, сила натяжения на расстоянии x от нижнего конца пружины равна $F(x)=mgx/l$ (покажите). Но тогда ситуация такая же, как и в задачах 1 и 3. Воспользовавшись их результатами, находим, что динамометр покажет эффективную силу $F_{эф}=mg/2$.

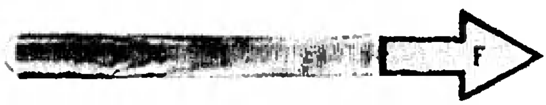


Рис. 4.

Вывод: масса пружины динамометра равна $m=2F_{эф}/g$, где $F_{эф}$ — показания динамометра в вертикальном положении.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

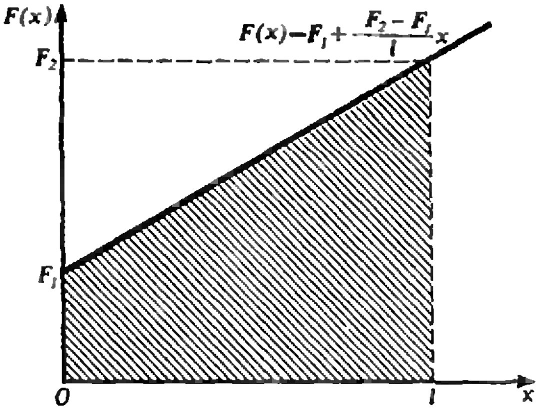


Рис. 5.

Упражнения

1. Динамометр подвешен вертикально за верхний конец (за который пружина прикреплена к шкале). К его нижнему концу подвешен (верхним концом) второй динамометр, а к нижнему концу второго — третий. Все динамометры одинаковые. Верхний динамометр показывает силу F. Что показывают второй и третий динамометры? Массой шкал пренебречь.

2. Пружина в горизонтальном положении имеет длину 1 м. Подвешенная за один конец, она растягивается до 1,2 м. Другая такая же пружина имеет в горизонтальном положении длину 2 м. До какой длины она растянется, *если ее тоже подвесить за один конец?*

3. Пружина динамометра может как растягиваться, так и сжиматься, подчиняясь в обоих случаях закону Гука. За один конец динамометра тянут с силой 70 Н, другой толкают в том же направлении с силой 50 Н. Что покажет динамометр?

4. Стержень, изготовленный из упругого материала (*металл, резина*), аналогичен пружине. Если на его торцы действуют одинаковые растягивающие силы F, то относительное удлинение стержня равно $\Delta l/l=F/(ES)$, где S — площадь поперечного сечения стержня, E — коэффициент, зависящий от свойств материала (модуль Юнга). Какой должна быть длина стального стержня в горизонтальном положении, чтобы при подвешивании его за один конец длина стержня увеличилась на 1 мм? Для стали $E=2{,}1\cdot10^5$ Н/мм², плотность $\rho=7{,}8\cdot10^3$ кг/м³.

5. Стальной стержень (см. предыдущую задачу), поставленный «на попа», имеет длину 1 м. Какой будет длина стержня, если его подвесить за верхний конец?

Пинч-эффект

(Начало см. на с. 18)

сверхвысокого напряжения (миллионы вольт). Делается это следующим образом. При разрушении расплавленной проволочки ее сопротивление практически мгновенно увеличивается во много раз, в то время как ток в цепи, определяемый в основном индуктивностью проволочки, почти не изменяется. Поэтому и возникает импульс высокого напряжения (который сложно получить другими способами).

И еще один «родственник» жидкометаллической струи — плазменный шнур термоядерного реактора. Оказывается, и он подвержен такому же разрушению, как токонесущая струя! Создатели термоядерного реактора столкнулись с коварнейшим свойством плазмы — ее неустойчивостью. Если в плазменном шнуре возникает перетяжка или другое отклонение от состояния равновесия, то под действием локально усиливающегося магнитного поля оно увеличивается до полного разрыва шнура. За миллионные доли секунды плазменный шнур разрушается.

Именно это явление иллюстрирует жидкометаллическая токонесущая струя на нашей фотографии (с. 18). Но перечень интересных и красивых физических эффектов, которые способна демонстрировать свободная струя, далеко не исчерпывается тем, что можно увидеть на этой фотографии. «Все, что видим мы,— видимость только одна...»

Ни Лойд, ни Дьюдени...

И. АКУЛИЧ

Есть такой анекдот. В редакции молодому поэту сказали:

— У Вас есть два стихотворения, которые не смогли бы написать ни Пушкин, ни Лермонтов.

— Правда? — обрадовался тот.

— Да, одно о радио, другое о телевидении.

Многим из нас знакомы прекрасные задачи известных сочинителей головоломок Сэма Лойда и Генри Дьюдени. Повозиться с ними одно удовольствие. Особый колорит этим задачам придает то, что авторы представили их в виде коротких историй, будто бы имевших место в действительности, притом для решения зачастую приходится привлекать сведения, явно не содержащиеся в условии. Сборники таких головоломок («Математическая мозаика» Лойда и «Кентерберийские головоломки» Дьюдени) исчезли с прилавков книжных магазинов практически мгновенно.

В этой статье читателю предлагается несколько задач, также изложенных в виде историй. Их не смогли бы составить ни Лойд, ни Дьюдени как раз в силу причин, указанных в анекдоте: того, о чем пойдет речь, в их времена просто не существовало. Итак:

Число на асфальте

Петя и Коля, встретившись на улице, увидели написанное мелом на асфальте двузначное число. Петя прибавил к нему 4 и затем поделил на 7, а Коля поделил его на 9 и затем отнял 1. Результаты совпали.

Какое число было написано?

«Что же здесь современного?» — спросит читатель. Конечно же, асфальт! В те времена дороги асфальтом не покрывали, а писать мелом на брусчатке крайне неудобно. Поэтому можно смело утверждать, что ни Лойд, ни Дьюдени составить такую задачу не смогли бы.

Шахматные часы

В печати промелькнуло сообщение об изобретении новых шахматных часов. Такие часы отводят каждому игроку первоначально 40 минут, а после каждого сделанного хода резерв времени увеличивается на 2 минуты. Таким образом, во-первых, сохраняется общепринятая норма времени (2 часа на 40 ходов)*), и во-вторых, при обдумывании каждого хода игрок имеет запас времени не менее двух минут, что снижает вероятность грубых ошибок, вызываемых цейтнотом. После 40 ходов партия откладывается и затем доигрывается с новым контролем времени.

В шахматном турнире с использованием этих часов встретились шахматисты A и B, причем шахматист A тратил на обдумывание каждого хода одинаковое время. Сделав очередной

*) Въедливый читатель заметит, что не 2 часа, а 1 час 58 минут. (*Прим. ред.*)

ход, он заметил, что всего израсходовал столько же времени, сколько у него осталось в резерве. Еще через несколько ходов он обнаружил, что запас стал в два с половиной раза меньше затрачено времени. Известно также, что его противник сделал в партии не менее 14 ходов, и встреча закончилась без доигрывания победой одного из игроков.

А теперь попробуйте ответить на вопросы:

1) Кто играл белыми?

2) Кто выиграл?

Вот еще одна современная задача, но связанная не с достижениями науки и техники, а с новой модной теорией.

Задача о биоритмах

Прошлым летом (как сейчас помню — второго числа) мы отмечали день рождения Сергея Сергеевича, а той же осенью (помнится, десятого числа) — день рождения его племянника.

— Мы с племянником — близкие натуры,— заявил тогда Сергей Сергеевич,— и не только по причине родства, но и потому, что наши биоритмы полностью совпадают.

— Это точно,— подтвердил племянник.

Вопросы:

1) В каком месяце родился Сергей Сергеевич?

2) В каком веке родился Сергей Сергеевич?

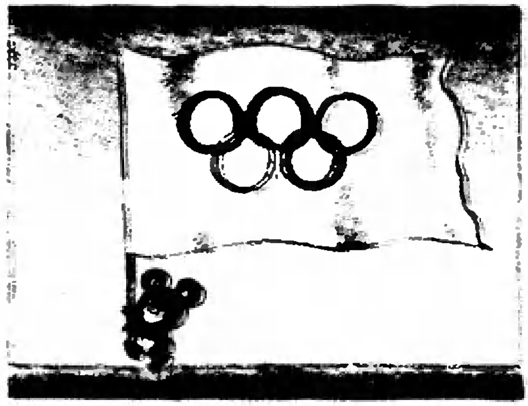
Примечание (для тех, кто не знает, что такое биоритмы): существует теория, согласно которой при рождении человека одновременно «включаются» три цикла: физический, эмоциональный и интеллектуальный продолжительностью соответственно 23, 28 и 33 суток; в первой половине каждого цикла соответствующие способности и склонности человека повышены, во второй — понижены.

В следующей задаче попробуйте определить не месяц и не век, а год.

Какой год?

Петр Петрович родился в день открытия Олимпийских игр. Как-то, отметив свой день рождения, он обнаружил, что его возраст стал равен сумме цифр текущего года. В каком году родился Петр Петрович?

А сейчас — самая «свежая» задача, хотя она с виду таковой не кажется.



Задача о киоске

Весной 1991 года Петя купил в киоске набор марок за 51 копейку, жевательную резинку за 1 рубль 20 копеек, 12 листов цветной бумаги и 3 конверта, но цену листа бумаги и конверта он не знал. Когда киоскер назвал сумму: 2 рубля 2 копейки, Петя сразу воскликнул: «Не может быть!», но потом оказалось, что все правильно. Почему Петя заподозрил ошибку? Сколько стоит конверт и лист бумаги?

Задача о мармеладе

Один школьник описывал другому случай, происшедший с ним в школьном буфете:

— Захотелось мне мармеладу, а денег мало. Я подсчитал свои возможности и говорю: «Взвесьте мне, пожалуйста, 25 граммов», а буфетчица в ответ: «У меня гирьки такой нет, самая маленькая — 50 граммов». Так я и ушел несолоно хлебавши. (Весы в буфете рычажные, с двумя чашками и без стрелок.)

— Ну ты и профан! — воскликнул собеседник.— Разве ты не знаешь, что каждая медная монета весит столько же граммов, сколько копеек составляет ее достоинство? Ты бы сказал: «Вот Вам 5 медяков по 5 копеек, они весят как раз 25 граммов» — и все в порядке.

— Будь у меня такие деньги, я бы купил больше. Но у меня-то было всего 4 копейки...

Поразмыслив, приятели нашли два способа взвесить 25 граммов мармелада в указанных условиях. А найдет ли читатель?

Надеюсь, предложенные задачи пришлись вам по вкусу. Надеюсь также, что прежде чем читать приведенные ниже решения, вы сами поломаете голову в поисках путей к ним...

Решения

Число на асфальте

Задача кажется очень простой и разрешимой очевидным образом. Но не тут-то было!

Более сообразительные школьники сразу поймут: что-то не так. Действительно, Петя сначала *увеличил* число, а затем взял от него *седьмую* часть; Коля же взял *девятую* часть, которую затем еще и *уменьшил*. Но ведь тогда у Пети наверняка должен получиться больший результат, чем у Коли! Менее сообразительные просто попробуют решить задачу «в лоб» и, обозначив искомое число через x, составят уравнение: $(x+4)/7=x/9-1$, откуда $x=-49{,}5$, что вообще не лезет ни в какие ворота.

В чем же дело? Чтобы разобраться, еще раз осмыслим условие задачи. Итак, Петя и Коля встречаются (видимо, лицом к лицу), затем опускают глаза вниз и видят число... Скорее всего, так оно и было. Но тогда они увидят число с разных сторон! Теперь понятно, в чем причина: некоторые числа, будучи перевернутыми, имеют вполне корректный вид, но другие числовые значения. Однако это возможно, только если каждая цифра такого числа допускает переворачивание. Какие же это цифры? Это, конечно, 0 и 8, переходящие сами в себя; 6 и 9, переходящие друг в друга; а также с некоторой натяжкой цифра 1 (здесь можно спорить, но на всякий случай включим и ее). Какие-то из них и составили записанное на асфальте двузначное число, которое Петя воспринял как некоторое число $П$, а Коля — как его «антипод» K. Тогда $(П+4)/7=K/9-1$, откуда $7K=9(П+11)$. Во-первых, отсюда следует, что $K>П$ (что, впрочем, и без того очевидно), а во-вторых, становится ясно, что K делится на 9.

Из цифр 0, 1, 6, 8, и 9 можно составить всего 5 чисел K, делящихся на 9 (включая на всякий случай и начинающиеся цифрой 0). Это: 09, 18, 81, 90 и 99, которым соответствуют $П$, равные 60, 81, 18, 06 и 66. Значения K, равные 09 и 18, придется отбросить, так как для них $K<П$. Для остальных трех значений сделаем прямую проверку:

1) $K=81$, $П=18$. Тогда $(П+4)/7=22/7$ и $K/9-1=8$. Не подходит.

2) $K=90$, $П=06$. Тогда $(П+4)/7=10/7$ и $K/9-1=9$. Тоже не подходит.

3) $K=99$, $П=66$. Тогда $(П+4)/7=10$ и $K/9-$ $-1=10$. Это подходит.

Итак, Петя и Коля видели одно и то же число, но Петя воспринял его как 66, а Коля — как 99.

Шахматные часы

Пусть игрок A сделал n ходов и на обдумывание каждого хода тратил t минут. Тогда всего он потратил tn минут.

Шахматные часы отвели ему 40 минут первоначально и по 2 минуты за каждый сделанный ход, т. е. $(40+2n)$ минут. Из них tn минут он израсходовал, поэтому после n-го хода его запас составляет $(40+2n-tn)$ минут.

Если после n-го хода израсходованное время равно запасу, то $tn=40+2n-tn$, откуда $t=$ $=(20+n)/n$.

Если после другого, m-го хода израсходованное время оказалось в 2,5 раза больше резерва, то, рассуждая аналогично, получим $tm=$ $=2{,}5(40+2m-tm)$, откуда $t=(200+$ $+10m)/7m$.

Приравняв полученные значения t, имеем $(20+n)/n=(200+10m)/(7m)$, откуда $m=$ $=200n/(140-3n)$.

Видно, что с ростом n растет и m (так как числитель возрастает, а знаменатель уменьшается). При этом наименьшее n, при котром m будет целым,— это $n=5$ (тогда $m=8$). Следующее по величине значение n, при котором m будет также целым,— это $n=20$ (тогда $m=50$). Но в последнем случае партия продолжалась бы не менее 50 ходов, и она по этой причине должна быть отложена, а затем доиграна, что противоречит условию. Еще бо́льшие значения n влекут за собой еще бо́льшие значения m. Поэтому возможен лишь один вариант: $n=5$, $m=$ $=8$. Тогда $t=(20+n)/n=5$ минут.

А теперь подсчитаем, на сколько ходов хватило бы времени шахматисту A, если бы он тратил 5 минут на ход. Видно, что после каждого хода его запас времени уменьшается на 3 минуты, поэтому он может сделать максимум 13 ходов, после чего останется лишь минута, т. е. 14-й ход он сделать не успеет.

По условию, игрок B сделал не менее 14 ходов. Если бы B играл черными, то тогда A, играя белыми, тоже сделал бы не менее 14 ходов, но это, как мы только что выяснили, невозможно. Поэтому A играл черными.

После того как B, играя белыми, сделал 14 ходов, наступила очередь A делать 14-й ход. Но у него не хватит на это времени! И поэтому он наверняка проиграл, просрочив время (или сдался после 14-го хода противника, либо же получил мат на 14-м ходу). Во всяком случае, A проиграл.

Задача о биоритмах

Так как НОК (23, 28, 33)=21252, то чтобы биоритмы Сергея Сергеевича и его племянника совпали, разность их возрастов должна быть кратна 21252 дням. Так как это более 58 лет, то ясно, что либо дядя и племянник ровесники, либо один из них старше на 21252 дня (поскольку оба они одновременно живы, то бо́льшие разности нереальны).

Но ровесниками они быть не могут, т. к. день рождения дяди летом, а племянника — осенью. Кроме того, так как $21252=365\times58+82$, то разность их возрастов составляет 58 лет плюс какой-то срок, заведомо меньший трех месяцев. Поэтому если бы племянник был старше, то день рождения дяди наступил бы позже дня рождения племянника на срок, не превышающий трех месяцев, т. е. дядя родился бы осенью или зимой, но никак не летом. Поэтому племянник не может быть и старше дяди.

Итак, дядя старше племянника на 21252 дня.

Теперь определим, в каком веке родился дядя. Здесь, очевидно, возможны два варианта: XIX или XX век. Допустим, дядя родился в XX веке. Так как $58=14\times4+2$, то из 58 идущих подряд лет либо 14, либо 15 високосных, и следовательно, дядя старше племянника на 58 полных лет плюс либо $82-14=68$, либо $82-$ $-15=67$ дней, т. е. немногим более двух месяцев. Два летних или осенних идущих подряд месяца могут содержать вместе либо 61 день (например, август+сентябрь), либо 62 дня (только июль+август). Поэтому окончательно дядя старше племянника на 58 полных лет, 2 полных месяца и сверх того либо $67-62=5$ дней, либо $67-61=68-62=6$ дней, либо $68-$ $-61=7$ дней. Но тогда если дядя родился 2-го числа, то племянник мог родиться либо $2+5=$ $=7$-го, либо $2+6=8$-го, либо $2+7=9$-го числа, но никак не 10-го! Как же так?

Разгадка в том, что 1900-й год не был високосным. Поэтому если дядя родился в XIX веке, то из 58 подряд идущих лет либо 13, либо 14 високосных. Если их 13, то дядя старше племянника на 58 полных лет и 69 дней; и если к тому же два идущих подряд месяца — не июль с августом, то дядя старше племянника на 58 лет, 2 месяца и 8 дней, что как раз удовлетворяет условию (ибо $2+8=10$).

Итак, дядя родился в XIX веке.

Определим месяц его рождения. Так как он, по условию, родился летом, то возможны 3 варианта: 2-е июня, 2-е июля и 2-е августа. Соответствующие даты для племянника: 10-е августа, 10-е сентября и 10-е октября. Первый вариант не подходит: в нем племянник родился не осенью. Второй тоже не годится: разность дней рождения составляет не 69, а 70 дней сверх 58 лет (здесь как раз «влезли» июль с августом, и $31+31+8=70$). Поэтому остается единственная возможность: Сергей Сергеевич родился в августе (а племянник в октябре).

То, что такой ответ корректен, подтверждает пример: Сергей Сергеевич родился 2 августа 1897 года, а его племянник — 10 октября 1955 года. У обоих получается вполне жизнеспособный возраст (хотя у дяди весьма и весьма почтенный), а разность их возрастов, как легко проверить, составляет ровно 21252 дня.

Какой год?

Для решения этой задачи необходимо иметь некоторые минимальные сведения об Олимпийских играх, известные, впрочем, практически каждому школьнику.

Итак, в некотором году сумма цифр этого года равна возрасту Петра Петровича. Следовательно, если от номера этого года отнять эту сумму цифр, то получится год его рождения. Но если от любого числа отнять сумму его цифр, то получится число, делящееся на 9. Поэтому год рождения Петра Петровича делится на 9.

Олимпийские игры, как известно, проводятся в годы, делящиеся на 4. Поэтому год рождения делится и на 9, и на 4, а следовательно — на 36.

С начала Олимпийских игр (а начались они в конце прошлого века, точнее — в 1896 году) было лишь три года, делящихся на 36: 1908, 1944 и 1980.

Но в 1944 году Олимпийские игры не проводились — шла вторая мировая война.

1980 год надо отбросить по другой причине: с тех пор не было ни одного года, сумма цифр которого равнялась бы возрасту. В этом легко убедиться, просто перебрав все годы с 1981-го по нынешний. Но можно и по-другому: допустим, что такой год был. Тогда его первая цифра — это 1, вторая — 9, третья — 8 или 9, т. е. не менее 8. Поэтому возраст был не меньше $1+9+8=18$, что произойдет не раньше $1980+18=1998$ года, до которого еще ой как далеко! Итак, 1980 год тоже отпадает.

Остается один вариант: Петр Петрович родился в 1908 году. В этом году действительно проводились Олимпийские игры (в Лондоне). Вторая часть условия тоже выполняется: в любой год с 1920-го по 1929-й включительно сумма цифр года как раз равнялась возрасту.

Задача о киоске

Упоминание о весне 1991 года существенно, порядки в нашей торговле меняются так быстро, что в другое время задача вполне могла бы иметь другое решение.

Петя наверняка заметил, что цена марок и резинки делится на 3, и, кроме того, количество листов бумаги и конвертов также делится на 3. Следовательно, общая сумма также должна делиться на 3. Но она не делится! Понятно, что Петя заподозрил ошибку. Но его подвело... как вы думаете, что? Ну, конечно же, знаменитый пятипроцентный налог, взимаемый с общей стоимости покупки и округляемый до целого числа копеек. Если общая стоимость купленных вещей равна s копеек, то с налогом это составит $1{,}05s$. Это значение с округлением до целых равно 202 копейки. Следовательно, можно утверждать, что $201{,}5<1{,}05s<202{,}5$, откуда $191{,}9...<s<192{,}8...$ и потому $s=192$ копейки (делится на 3, как и должно быть!). Пусть лист бумаги стоил x копеек, а конверт — y копеек. Тогда $51+120+12x+3y=192$, откуда $12x+3y=21$, и $4x+y=7$. Единственное решение этого уравнения в натуральных числах — это $x=1$ и $y=3$ т. е. лист бумаги стоил одну копейку, а конверт — 3 копейки.

Задача о мармеладе

Разумеется, бессмысленно отвешивать 25 г порциями по 4 г — такая точность для торговых весов заведомо недостижима. С другой стороны, из слов буфетчицы следует, что будь у нее гиря в 25 г — и она смогла бы взвесить требуемое. Поэтому надо найти какие-то предметы общим весом 25 г. Для этого можно, например, использовать медную мелочь, имеющуюся у буфетчицы — у нее-то наверняка наберется 25 копеек медью! В крайнем случае школьник добавил бы свои 4 копейки.

Другой способ основан на словах буфетчицы о том, что у нее имеется гиря весом 50 г. Пусть она взвесит 50 г мармелада, а затем разложит их на две чашки весов, чтобы они уравновесились. Тогда на каждой чашке будет как раз 25 г мармелада.

По-видимому, возможны и другие способы.

Теперь насчет несоответствия условия сегодняшнему дню. Во-первых, чашечные весы без стрелок в школьных буфетах практически не встречаются, во-вторых, если 25 г мармелада стоят 4 копейки, то 1 кг — всего лишь 1 рубль 60 копеек. Теперь такой дешевый мармелад можно встретить только в старых кинофильмах.

„Квант" улыбается

Кроссворд «КВАНТ»

Наверное, никого из вас не миновали ошибки на уроках. Порой они, помимо неприятных эмоций вам, доставляли много радости братьям по классу. Уж очень забавные оговорки встречаются! Попробуйте решить кроссворд, составленный из ответов моих учеников на уроках физики. Я назвал его «КВАНТ» — «Кроссворд, Включающий Абсолютно Новую Терминологию». Жаль только, кривоватый получился.

Итак, только цитаты. На месте многоточий — существительные в единственном числе именительного падежа.

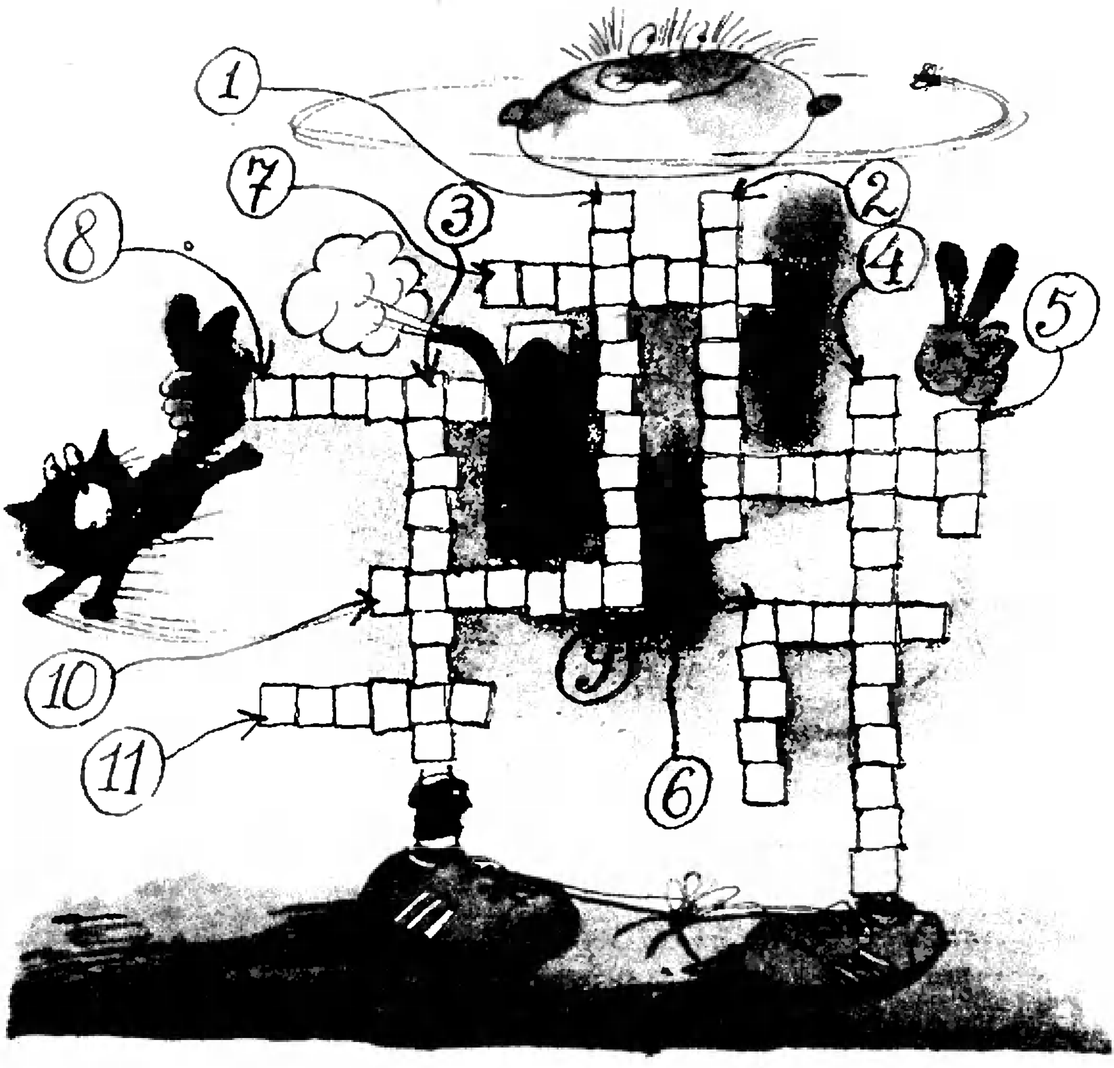
По вертикали:

1. «...— явление, когда луч искривляется по прямой». 2. «...— движение, при котором тело имеет максимальную скорость там, где оно остановится». 3. «... имеет 3 контакта: для тока, напряжения и усилительный». 4. «...— прибор, преобразующий силу тока в напряжение». 5. «...— это воздух, в котором очень много воды». 6. «...— это место, где параллельные лучи останавливаются».

По горизонтали:

6. «...— часть света, окруженная воздухом». 7. «...— это маленький организм, живущий в воде». 8. «Спутник не падает на Землю, потому что его держит ...». 9. «...— кривая, по которой будет подниматься поршень, если газ нагревать». 10. «...— явление, когда вода испаряется не наружу, а внутрь». 11. «...— это единица измерения ядерных сил».

Б. Корсунский



Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{4\cos 2x-2\sin 2x}=2\cos x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(1-3x/2)}{\log_9(2x)}\geqslant 1.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4x-4y-6,\\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

4. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Из точки D радиусом, равным AD, описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если заданы длины отрезков $AB=c$, $AM=n$ и $AN=m$.

5. Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство

$$|x^2+px+q|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;\ 5]$.

6. В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD, BE, CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $7/2$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE, BF, CD за точки A, B и C соответственно. Найдите длину боковых ребер призмы.

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}+x-2=0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)=1.$$

3. Решите неравенство

$$49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\geqslant 0.$$

4. Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что величина угла PQR равна $2\arcsin\frac{1}{3}$, а сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B и C?

5. Проверьте справедливость неравенства $y\leqslant 3{,}17$, где y — наименьшее на интервале $(0;\ 1)$ значение функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+0{,}003)^{0,45}}+\frac{3}{(1-x)^{0,45}}\right)+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(x+0{,}003)^{0,45}}-\frac{3}{(1-x)^{0,45}}\right|.$$

6. Сфера радиуса R касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях α и β, а остальные шесть граней — боковые грани — представляют собой или равные между собой трапеции, или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{13}$, расположены в плоскости β и образуют многоугольник площади 12, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости α. Площадь поверхности сферы относится к суммарной площади боковых граней как π относится к 5. Известно, что $3<R<4$. Найдите R.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$8-7\sin 2x=12\sin^2 x.$$

2. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара равна площади основания конуса. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

3. Решите неравенство

$$\log_{49}(x+3)-\log_7(x+2)<0.$$

4. В треугольнике ABC угол C — тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведенная из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM=a$, $MB=b$. Найдите AC.

5. При каких значениях a все корни уравнения

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют условию $|x|<1$?

6. В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($BC\parallel AD$, $AD/BC=2$). Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM/MB=2$. Площадь получившегося сечения равна S, а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d. Найдите

1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды,

2) объем пирамиды.

Вариант 4
(химический факультет)

1. Найдите максимум и минимум функции

$$f(x)=\frac{3x+1}{(3x+1)^2+1}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}>\left(\frac{1}{4}\right)^{|x+1|}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3,\\ 2xy-y+6x-3=4.\end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\cos^4 x=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos^2 x\cos 8x.$$

5. Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB — диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что длина отрезка MK равна $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, а угол BMA равен $15°$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^{\sqrt{x}+1,5}-13\cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}}+20=0.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 2x+\sin 3x+\cos 5x=1.$$

3. Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвертого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?

4. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO:OC=3:2$. Найдите площадь треугольника OEC.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0,\\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x,\\ (x+y+a\sin^2 z)\left((1-a)\ln(1-xy)+1\right)=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$25^x+24\cdot 5^{x-1}-1=0.$$

2. Три сенокосилки имеют разную производительность. Первая и вторая сенокосилки, работая вместе, скашивают некоторое поле за 10 часов, а вторая и третья, работая вместе, скашивают это же поле за 8 часов. Если бы работали три сенокосилки, то они скосили бы это поле за 5 часов. За какое время скосит это поле каждая из сенокосилок?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|.$$

4. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD, причем точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD. Найдите длину отрезка CN, если $BM/DN=2/3$.

5. Для каждого отрицательного числа a найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{1}{3}(x-a)^3-\frac{1}{2}(x-a)^2$$

на промежутке $0\leqslant x\leqslant 1$.

Вариант 7
(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 7x\cos x=\sin 6x.$$

2. Решите уравнение

$$|x^2-2x-1|-x+1=0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}\geqslant\frac{2}{4-\sqrt{x}}.$$

4. Решите уравнение

$$3^{2(\log_9 x)^2}+1=4\cdot 3^{(\log_9 x)^2}.$$

5. Четыре точки окружности следуют в порядке A, B, C, D. Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причем угол AED равен $60°$. Угол ABD в три раза больше угла BAC. Докажите, что AD — диаметр окружности.

6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

Вариант 8
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\cos^2 x-7\cos x=2\sin^2 x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{4}\log_2(x-2)-\frac{1}{2}\leqslant\log_{1/4}\sqrt{x-5}.$$

3. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел (в том же порядке) составляют геометрическую прогрессию. Найдите a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1+a_2+a_3=21$.

4. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E, где расстояние AE составляет треть длины AC, а на стороне AD взята точка F, где расстояние AF составляет четверть длины AD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$, где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC, равна 8.

5. Найдите все действительные значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}8xy-25=0,\\ x^2=y+2x\end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2+y^2\leqslant a^2$.

Вариант 9
(экономический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin(3\pi\cdot 2^x)=\cos(\pi\cdot 2^x)-\sin(\pi\cdot 2^x).$$

2. Решите неравенство

$$\log_{1/7}\log_3\frac{|-x+1|+|x+1|}{2x+1}\geqslant 0.$$

3. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной из точки C к окружности, равна 3, $AB=1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC.

4. Определите наименьшее значение функции

$$F(r)=(r-2)(4+(r-1)(r-4))(r-3),\ r\in\mathbf{R}.$$

5. Найдите площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$(x^2+y^2-x-y)(x^2+y^2-1)\leqslant 0.$$

6. Найдите все значения параметра q, при которых уравнение

$$\sin^2 x+(q-2)^2\sin x+q(q-2)(q-3)=0$$

имеет на отрезке $[0;\ 2\pi]$ ровно три корня.

Вариант 10
(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\lg(x+4)>-2\lg\frac{1}{2-x}.$$

2. Решите уравнение

$$(\cos x-1)(\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x-1)=\sin^2 x.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases}\log_3 x-2^y+y=3,\\ y\cdot 2^y+2^y\cdot\log_3 x=4.\end{cases}$$

4. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении: $AK:BK=CL:BL=CM:DM=1:2$. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен $5/2$, $KL=4$, $LM=3$. Какова площадь $ABCD$, если известно, что $KM<KL$?

5. При каждом значении параметра

$a \geqslant \frac{1}{2\pi}$ найдите все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2}\right).$$

Вариант 11
(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1.$$

2. В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиусом 4. Найдите площадь трапеции.

3. Решите уравнение

$$\cos^2(45^\circ+x)=\cos^2(45^\circ-x)+\sqrt{5}\cos x.$$

4. При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении была увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найдите множители.

5. Решите неравенство

$$\log_{\log_{1/2}x}(\log_{1/7}x)>0.$$

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-|x|=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Вариант 12
(филологический факультет)

1. Представьте число 1991 в виде произведения простых чисел.

2. Решите уравнение

$$\log_2(5\cdot 2^x+3)=2x+1.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199}<1.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{2}{\pi}\sin x+\cos 19\pi=\cos x.$$

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD=4$, а $BC=3$.

6. Найдите все значения p, при которых неравенство

$$\log_{(x-p)}x^2<2$$

выполняется хотя бы для одного числа x, такого что $|x|<0{,}01$.

Физика

Задачи устного экзамена

Механико-математический факультет

1. На нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза, массы которых $m_1=100$ г и $m_2=50$ г (рис. 1). В заторможенном состоянии (когда грузы неподвижны) блок уравновешен на рычажных весах. На какую величину нужно изменить массу гирь на чашке, чтобы при освобождении блока (когда грузы придут в движение) сохранить равновесие весов?

2. Начальное положение кабины лифта Л и противовеса П изображено на рисунке 2. На какую величину изменится потенциальная энергия системы при перемещении кабины вверх на расстояние $h=10$ м, если начальная разность уровней противовеса и кабины $H=15$ м, масса кабины $M=1$ т, масса противовеса $m=0{,}5$ т, а масса единицы длины троса, соединяющего кабину с противовесом, $\mu=10$ кг/м?

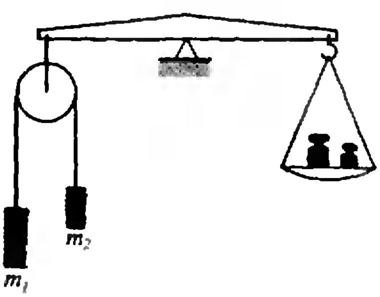


Рис. 1.

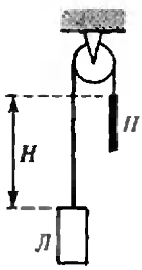


Рис. 2.

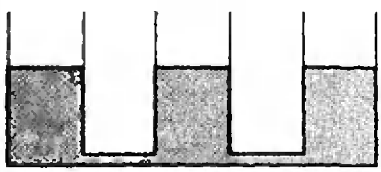


Рис. 3.

Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

3. В трех одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть (рис. 3). В левый сосуд налили слой воды высотой $h_1=180$ мм, а в правый — высотой $h_3=228$ мм. На сколько сместится уровень ртути в среднем сосуде, если известно, что ртуть из левого и правого сосудов не вытесняется водой полностью? Плотность ртути $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

4. Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд высотой $H=50$ см разделен подвижным поршнем весом $P=110$ Н на две части, в каждой из которых содержится по $\nu=0{,}0255$ моля идеального газа. При какой температуре расстояние между поршнем и дном сосуда будет равно $h=20$ см? При расчетах толщиной поршня пренебречь, универсальную газовую постоянную принять равной $R=8^1/_3$ Дж/(моль · К).

5. В баллоне объемом $V=10$ л содержится водород при температуре $t=20$ °С под давлением $p=10^7$ Па. Какая масса водорода была выпущена из баллона, если при полном сгорании оставшегося газа образовалось $m=50$ г воды? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К), молярная масса водорода $M_{H_2}=2$ г/моль, воды $M_{H_2O}=18$ г/моль.

6. Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при температуре $t_1=100$ °С, а в качестве холодильника — сосуд со льдом при $t_2=0$ °С. Какая масса льда растает при совершении машиной работы $A=10^6$ Дж? Удельная теплота плавления льда $\lambda=334$ кДж/кг.

7. В схеме, показанной на рисунке 4, емкости конденсаторов равны $C_1=1$ мкФ, $C_2=2$ мкФ, $C_3=3$ мкФ, $C_4=4$ мкФ. Напряжение между точками A и B составляет $U=100$ В. Найдите напряжение на конденсаторе емкостью C_4, если до подключения напряжения U конденсаторы были не заряжены.

8. Параллельные проводящие шины, расположенные в горизонтальной плоскости, замкнуты на резистор сопротивлением R и помещены в постоянное однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен вертикально вниз (рис. 5). По шинам без трения может перемещаться проводник AD, сохраняя постоянно контакт с шинами. Найдите величину и направление силы, которую нужно приложить к проводнику, чтобы он двигался вдоль шин поступательно с постоянной скоростью v. Сопротивлением шин и проводника можно пренебречь. При расчетах положить $R=100$ Ом, $B=2$ Тл, $v=0{,}1$ м/с, $l=20$ см.

9. Отрезок AB, параллельный главной оптической оси собирающей линзы, расположен на расстоянии d от оси так, что его концы удалены от плоскости линзы на расстояния a и b соответственно (рис. 6). Найдите длину изображения отрезка, если фокусное расстояние линзы F и $b>a>F$.

10. Две одинаковые собирающие линзы с фокусными расстояниями F расположены на расстоянии $l=2F$ друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. На главной оптической оси перед первой линзой помещена некоторая точка A так, что луч света, вышедший из нее и прошедший обе линзы, пересекает эту ось в точке B, находящейся за второй линзой. Определите расстояние между точками A и B.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Однородный стержень лежит горизонтально на двух опорах. Расстояние от центра стержня до ближайшей опоры $s=0{,}3$ м. Найдите расстояние между опорами, если известно, что силы, действующие на стержень со стороны опор, отличаются друг от друга на величину, равную $\alpha=1/5$ веса стержня.

2. Деревянная линейка выдвинута за край стола на $\alpha=1/4$ часть своей длины. При этом она не опрокидывается, если на ее свешивающийся конец положить груз массой не более $m_1=250$ г. На какую часть длины можно выдвинуть за край стола эту линейку, если на ее свешивающийся конец положен груз массой $m_2=125$ г?

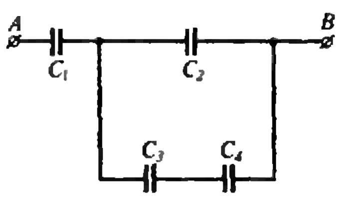


Рис. 4.

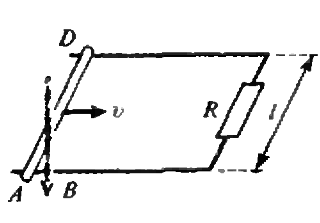


Рис. 5.

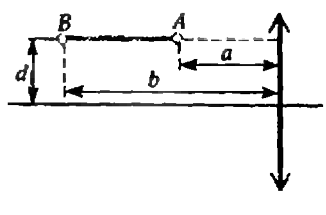


Рис. 6.

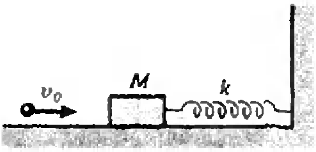


Рис. 7.

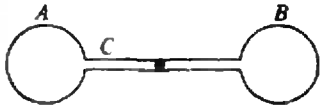


Рис. 8.

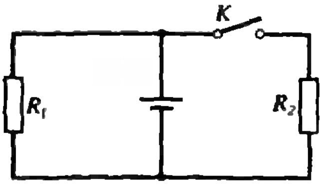


Рис. 9.

3. На горизонтальной плоскости лежит куб массой $M=2{,}5$ кг. В куб попадает горизонтально летящая пуля массой $m=10$ г и застревает в нем. Определите начальную скорость пули, если известно, что после попадания пули куб переместился поступательно на расстояние $l=1$ м. Коэффициент трения куба о плоскость $\mu=0{,}2$. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

4. На гладком столе покоится брусок массой $M=20$ г, прикрепленный пружиной жесткостью $k=50$ Н/м к стене (рис. 7). В брусок ударяется шарик массой $m=10$ г, движущийся по столу со скоростью, равной $v_0=30$ м/с и направленной вдоль пружины. Считая соударение шарика и бруска упругим, найдите амплитуду колебаний бруска после удара.

5. Цилиндрическая пробирка с грузиком, имеющая площадь поперечного сечения $S=1$ см^2, плавает в воде вертикально, причем из воды высовывается часть пробирки высотой $h=5$ см. Какова минимальная плотность жидкости, в которой пробирка с грузиком не утонет, если суммарная масса пробирки и грузика $M=20$ г? Плотность воды $\rho_0=10^3$ кг/м^3.

6. На горизонтальном участке пути длиной $L=3$ км скорость поезда увеличилась от $v_1=36$ км/ч до $v_2=72$ км/ч. Какое количество топлива израсходовал двигатель локомотива на этом участке, если суммарная масса поезда и локомотива $M=1000$ т, коэффициент трения $\mu=0{,}005$, удельная теплота сгорания топлива $q=42$ МДж/кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta=30\,\%$. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

7. Два одинаковых сосуда A и B соединены горизонтальной трубкой C, в которой находится капелька ртути (рис. 8). При температуре $T=300$ К капелька находится посередине трубки, причем объем воздуха в каждом сосуде и части трубки до капельки ртути равен $V=200$ см^3. На какое расстояние переместится капелька, если воздух с одной стороны от нее нагреть на $\Delta T=3$ К, а с другой — на столько же охладить? Площадь поперечного сечения трубки $S=20$ мм^2. Расширением стенок сосудов и трубки можно пренебречь.

8. В замкнутом сосуде к верхней стенке на пружине жесткостью $k=4$ Н/м подвешена сфера объемом $V=2$ л. На какую высоту поднимется сфера, если при постоянной температуре $t=17$ °С давление воздуха в сосуде повысить от $p_1=100$ кПа до $p_2=500$ кПа? Молярная масса воздуха M=29 г/моль. Универсальную газовую постоянную принять равной $R=8^1/_3$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

9. Сосуд содержит $m=1{,}28$ г гелия при температуре $t=27$ °С. Во сколько раз изменится средняя квадратичная скорость молекул гелия, если его адиабатически сжать, совершив работу $A=252$ Дж? Молярная масса гелия M=4 г/моль. Универсальную газовую постоянную принять равной $R=8^1/_3$ Дж/(моль · К).

10. В схеме, показанной на рисунке 9, резисторы имеют сопротивления $R_1=1$ Ом и $R_2=2$ Ом. Определите внутреннее сопротивление батареи, если известно, что при разомкнутом ключе K через резистор сопротивлением R_1 протекает ток $I_1=2{,}8$ А, а при замкнутом ключе K через резистор сопротивлением R_2 протекает ток $I_2=1$ А.

Химический факультет

1. Тонкая однородная доска лежит, касаясь средней точкой поверхности полусферы радиусом $R=2$ м с коэффициентом трения $\mu=\sqrt{3}$ (рис. 10). При какой наименьшей высоте h центра тяжести доски (от горизонтального основания полусферы) доска не будет соскальзывать с полусферы?

2. На тележке закреплен кронштейн, к которому на невесомой и нерастяжимой нити подвешен маленький шарик массой $m=0{,}02$ кг (рис. 11). Тележка, двигавшаяся горизонтально с постоянной скоростью $v=0{,}7$ м/с, внезапно останавливается, наткнувшись на препятствие. Найдите натяжение нити при прохождении маятником положения равновесия. Период малых колебаний $T=1{,}2$ с. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Железный шарик, двигающийся со скоростью $v=40$ м/с, ударяется об абсолютно гладкую плоскость, налетая на нее

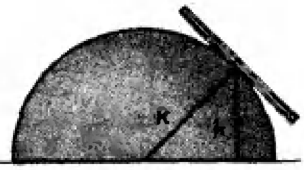


Рис. 10.

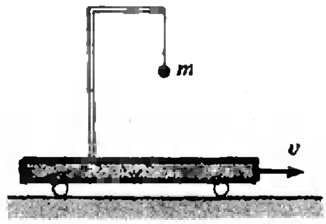


Рис. 11.

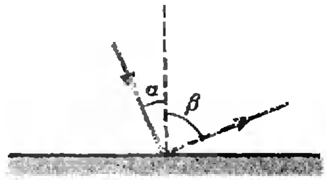


Рис. 12.

под углом $\alpha=30°$ (рис. 12). Найдите угол β, под которым шарик отразится от плоскости, если при ударе он нагрелся на $\Delta T=0{,}85$ К. Удельная теплоемкость железа $c=0{,}46\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Считайте, что выделяющееся тепло пошло только на нагревание шарика.

4. В теплоизолированный сосуд, содержащий $m_1=500$ г воды при температуре $t_1=10$ °С, помещено $m_2=100$ г льда, охлажденного до $t_2=-10$ °С. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c_1=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда $c_2=2100$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг. Потерями тепла можно пренебречь.

5. Результатом работы тепловой машины был подъем груза массой $m=10$ кг на высоту $h=20$ м. Отношение количества теплоты, полученного за один цикл от нагревателя, к температуре нагревателя $Q_н/T_н=200$ Дж/К, разность температур нагревателя и холодильника $T_н-T_х=125$ К. Сколько циклов было совершено за время подъема груза? Считайте, что вся механическая работа машины затрачена на подъем груза, а тепловая машина — идеальная.

6. Электроны влетают со скоростью $v=4\cdot10^6$ м/с в однородное электрическое поле между обкладками плоского конденсатора (рис. 13). Длина обкладок конденсатора $L=18{,}2$ см, расстояние между ними $d=1$ см, напряжение на конденсаторе $U=0{,}1$ В. При каком угле α между вектором скорости электронов и плоскостями обкладок кинетическая энергия электронов в результате пролета через конденсатор не изменяется? Величина заряда электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

7. Какой должна быть величина сопротивления R_2, чтобы разность потенциалов между точками A и B была равна нулю (рис. 14)? Величины остальных сопротивлений равны: $R_1=10$ Ом, $R_3=20$ Ом, $R_4=40$ Ом, $R_5=50$ Ом.

8. В однородном магнитном поле находится замкнутая обмотка, состоящая из $N=1000$ витков квадратной формы. Направление линий поля перпендикулярно плоскости витков. Индукция магнитного поля изменяется на $\Delta B=2\cdot10^{-2}$ Тл за время $\Delta t=0{,}1$ с, в результате чего в обмотке выделяется количество теплоты $Q=0{,}1$ Дж. Поперечное сечение провода обмотки $S=1\cdot10^{-6}$ м², удельное сопротивление $\rho=10^{-7}$ Ом·м. Найдите размер витка (сторону квадрата).

9. В непрозрачном экране вырезано небольшое круглое отверстие (рис. 15). Против центра отверстия на расстоянии $l=0{,}4$ м от него помещен точечный источник света S. По другую сторону экрана находится плоское зеркало, причем плоскости зеркала и экрана параллельны. На каком расстоянии x от экрана расположено зеркало, если лучи, отраженные от зеркала, освещают на экране вокруг отверстия кольцо, площадь которого равна площади отверстия?

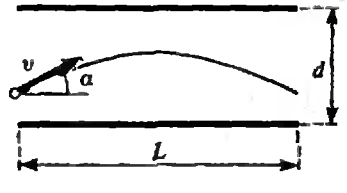


Рис. 13.

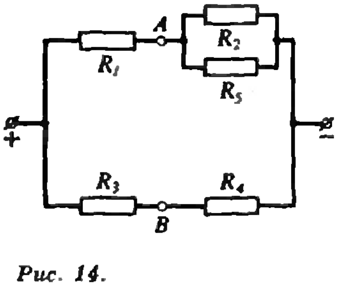


Рис. 14.

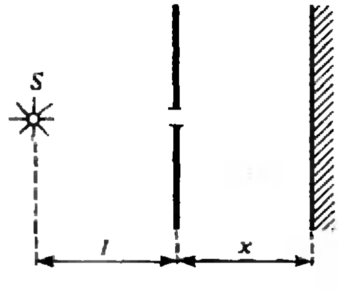


Рис. 15.

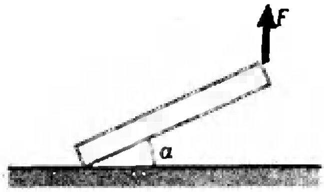


Рис. 16.

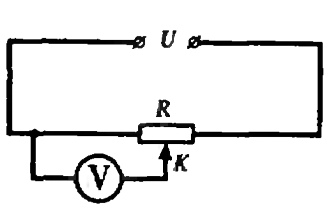


Рис. 17.

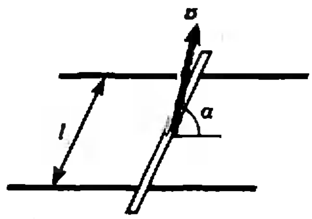


Рис. 18.

10. Действительное изображение светящейся точки получается на расстоянии $f=8$ см от линзы и на $h=2$ см ниже ее главной оптической оси. На каком наименьшем расстоянии перед линзой нужно поставить экран, имеющий форму верхней половины линзы, чтобы изображение точки исчезло? Фокусное расстояние линзы $F=5$ см, ее радиус $R=5$ см.

Географический факультет

1. Тело брошено с поверхности Земли с начальной скоростью $v_0=20$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонтали. Определите перемещение тела за вторую секунду движения. Считайте $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. Трубу массой $m=300$ кг, диаметром $d=1$ м и длиной $l=2\sqrt{3}$ м, лежащую в горизонтальном положении на поверхности Земли, приподнимают тросом, прикрепленным к одному из концов трубы, причем другой конец трубы в процессе подъема не проскальзывает по поверхности (рис. 16). Какую минимальную работу необходимо совершить для перевода трубы в положение, когда она образует угол $\alpha=60°$ с горизонталью? Считайте $g=10$ м/с^2.

3. Под чашкой рычажных весов подвешен на тонкой нити шарик. Масса уравновешивающих гирек $m_1=50$ г. Когда шарик поместили в воду, масса уравновешивающих гирек стала равной $m_2=30$ г. Определите плотность вещества, из которого сделан шарик, если плотность воды $\rho_0=10^3$ кг/м^3.

4. К потенциометру сопротивлением $R=4$ кОм приложено напряжение $U=110$ В (рис. 17). Каково будет показание вольтметра сопротивлением $R_V=10$ кОм, если подвижный контакт K установить в среднее положение?

5. Электродвигатель, рассчитанный на напряжение $U=120$ В и ток $I=20$ А, установлен на расстоянии $l=150$ м от источника напряжения $U_и=127$ В. Найдите нужное сечение проводов линии «источник — электродвигатель», если провода медные. Удельное сопротивление меди $\rho=0{,}017$ Ом · мм^2/м.

6. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l=1$ м друг от друга, на рельсах перпендикулярно к ним лежит перемычка, которая может двигаться вдоль рельсов (рис. 18). Индукция магнитного поля Земли равна $B=5\cdot10^{-5}$ Тл и направлена под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Какой минимальный ток необходимо пропустить по перемычке массой $m=0{,}1$ кг, чтобы она начала двигаться по рельсам? Коэффициент трения $\mu=0{,}1$.

7. При подключении первичной обмотки трансформатора к источнику переменного синусоидального напряжения во вторичной обмотке возникает ЭДС $\mathcal{E}_1=16$ В. Если к тому же источнику подключить вторичную обмотку, то в первичной возникает ЭДС $\mathcal{E}_2=4$ В. Найдите напряжение источника. Потери энергии в трансформаторе можно не учитывать.

8. Горизонтальное плоское зеркало движется вертикально вверх с постоянной скоростью $v_1=2$ см/с. Муха ползет по потолку комнаты со скоростью $v_2=3$ см/с. Найдите скорость движения изображения мухи в зеркале.

9. Точечный источник света расположен на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=30$ см от линзы. На экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси на расстоянии $l_1=10$ см от линзы, наблюдается светлое пятно. Размеры пятна не изменяются, если экран располагается на расстоянии $l_2=20$ см от линзы. Найдите фокусное расстояние линзы.

10. Источник света излучает ежесекундно $n=10^{19}$ фотонов. Длина волны излучения $\lambda=4{,}95\cdot10^{-5}$ см. Какую мощность потребляет этот источник, если в энергию света переходит $\eta=10\ \%$ потребляемой энергии? Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
А. Боголюбов, И. Ломов, В. Прошкин, А. Склянкин, А. Соколихин, С. Чесноков

Новости науки

Живой компьютер?

На обложке — фотография культуры нейронов. До самого последнего времени получить такую культуру не удавалось. И вот — прорыв. Чтобы была понятна суть этого удивительного достижения науки, необходимы некоторые пояснения.

В 1912 году Нобелевскую премию по медицине получил француз А. Каррель, разработавший (в США) технику выращивания тканевых культур. Некоторые его культуры жили в стеклянных чашках по тридцать и более лет. Как ему это удавалось, до сих пор остается загадкой. И вот почему.

Культуры клеток вошли в арсенал научных исследований только после второй мировой войны, когда ученые получили в свое распоряжение «мощные» и дешевые антибиотики, позволяющие бороться с бактериальным заражением («нагноением» культур), которое приводило к гибели клеток. Первыми были получены культуры раковых клеток, которые растут, делятся и размножаются практически в чистом питательном растворе. Обычные же здоровые клетки вывести из состояния «неделения» трудно — для этого требуются специальные добавки к питательной среде. Первой такой добавкой оказалась сыворотка крови теленка. В ней существуют особые белки, получившие название ростовых факторов, которые стимулируют размножение и деление клеток. Со временем ростовых факторов было выделено великое множество — чуть ли не для каждого типа клеток нашего организма обнаружен свой фактор, а то и несколько.

Довольно скоро удалось вырастить культуру эмбриональных нейронов, т. е. «предков» нервных клеток (их получают от зародышей, а также от клеток опухолей нервной системы). Но у этих культур имеется существенный недостаток: они не прошли так называемой дифференцировки, т. е. «созревания» клеток.

Нормальные нервные клетки наотрез «отказывались» делиться и размножаться. Наконец, проблема решена. Основы этому заложили работы итальянки Р. Леви-Монтальчини и ее американского ученика С. Коэна, открывших так называемый нервный ростовой фактор — белок, который резко стимулирует размножение и деление нейронов в культуре. За это достижение в 1986 году исследователи были удостоены Нобелевской премии по медицине.

Через четыре года в журнале «Science» появилось сообщение о получении культуры нейронов, взятых во время нейрохирургической операции у полуторагодовалой девочки. На нейроны подействовали нервным ростовым фактором, в результате чего была получена их дифференцировка. Нейроны разрослись, выпустили многочисленные отростки, которые стали соединяться друг с другом, образуя самую настоящую нейронную сеть, где пульсирует электрический ток.

Ну и что, скажет критически настроенный читатель. Получили еще одну культуру, пусть и весьма «экзотическую» сегодня, о которой мечтали поколения нейробиологов. Что же дальше?

А дальше — новые исследования. Уже через год с помощью этой культуры удалось открыть новый вид нейромедиатора — вещества, которое осуществляет связь между отдельными нейронами. Уникальность заключается в том, что новый «передатчик» нервных сигналов представляет собой молекулу всем знакомой окиси азота. До сих пор наука имела дело с гораздо более сложными молекулами нейромедиаторов.

Получение культуры нейронов, конечно же, имеет огромное значение для науки, исследующей работу нашего мозга. Но не только для нее. Нейронные культуры сулят уже в недалеком будущем огромные выгоды в такой области современной «High technology», как электроника и системы обработки информации.

Современные микросхемы — чипы — имеют один весьма существенный недостаток: они негибки и не обладают творческим потенциалом, они способны работать только по строго заданным программам. К тому же технология производства чипов экологически «агрессивна». Совсем другое дело — нейрональные «чипы», которые смогут приспосабливаться к самым разнообразным требованиям среды. И тогда настанет эра... «живой» электроники?!

И. Лалаянц

Библиотечка Фантастики «Кванта»

Мешок

(фантастический рассказ)

У. МОРРИСОН

Сначала они даже и не подозревали о существовании Мешка. Если они и заметили его, когда опустились на астероид, то, вероятно, подумали, что это просто скалистый выступ на голой кремнистой поверхности эллипсоидальной планетки, наибольший диаметр которой, по определению капитана Ганко, составлял около трех миль, а наименьший — около двух. Никому бы не пришло в голову, что скромный предмет, так неожиданно попавший в их руки, вскоре будет признан самой драгоценной находкой в солнечной системе.

Остановка была случайной. Правительственный патрульный корабль потерпел аварию и был вынужден искать места для ремонта, на который требовалось по крайней мере семьдесят часов. К счастью, они располагали запасом воздуха, и рециркуляционная система на корабле работала безукоризненно. Запасы пищи были ограничены, но это мало беспокоило экипаж, так как все знали, что можно затянуть пояса потуже и несколько дней прожить на урезанном пайке. Гораздо хуже обстояло дело с водой: большая часть ее пропала из-за течи в цистернах. В течение последующих пятидесяти часов вода была главной темой их разговоров.

Наконец капитан Ганко сказал:

— Что там говорить, воды не хватит. И нигде поблизости нет ни одной станции снабжения. Остается только радировать и надеяться, что нам навстречу вышлют спасательный корабль с аварийным запасом.

Шлемофон его помощника отозвался уныло:

Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики. Том 10» (М.: Молодая гвардия, 1967).

— Будет очень скверно, если мы не найдем друг друга в пространстве, капитан.

Капитан Ганко невесело рассмеялся.

— Конечно, скверно. Нам тогда представится случай выяснить, долго ли мы сможем выдержать без воды.

Некоторое время все молчали. Затем второй помощник сказал:

— Возможно, вода есть где-нибудь здесь, на астероиде, сэр.

— Здесь? Да как она может удержаться здесь при силе тяжести, которой едва хватает, чтобы не улетели скалы? И где она, черт подери?

— Отвечаю на первый вопрос,— отозвался мягкий жидкий голос, казалось, проникавший сквозь ткань скафандров откуда-то сзади.— Она может сохраниться в кристаллическом состоянии. Отвечаю на второй вопрос. Она находится на глубине шести футов, и добыть ее нетрудно.

При первых же словах все обернулись. Но там, откуда, как им казалось, доносился голос, никого не было. Капитан Ганко нахмурился, глаза его угрожающе сузились.

— Полагаю, среди нас нет неумных шутников,— кротко проговорил он.

— Нет,— ответил голос.

— Кто это говорит?

— Я, Изрл.

Тут один из членов экипажа заметил какое-то движение на поверхности огромной скалы. Когда голос смолк, движение прекратилось, но люди уже не спускали глаз с этого места. Так они узнали об Изрле, или Мешке Мудрости, как его чаще называли.

Если бы экипаж не состоял на государственной службе и если бы корабль не принадлежал правительству, капитан Ганко мог бы объявить Мешок своей собственностью или собственностью своих хозяев и вышел бы в отставку сказочно богатым человеком. Но при данных обстоятельствах Мешок перешел в собственность правительства. Его огромное значение было осознано почти сразу же, и Джейк Зиблинг имел основание гордиться, когда кандидатуры более важных и более влиятельных персон были отклонены, и Стражем Мешка назначили его. Зиблинг был коротеньким, плотным человечком, обладавшим чрезмерной склонностью к самокритике. Он выполнил несколько трудных заданий и позволил другим людям присвоить лавры своих успехов. Должность Стража была не для хвастуна, и те, от кого зависело назначение, знали об этом. На сей раз они игнорировали официальные чины и поверхностную репутацию и выбрали человека, которого несколько недолюбливали, но на которого полностью полагались. И это была величайшая дань из когда-либо приносившихся на алтарь честности и способностей.

Мешок, как выяснил Зиблинг, наблюдая его ежедневно, редко изменял форму, в которой люди увидели его впервые — твердый сероватый ком, напоминающий мешок с картошкой. Таким он оставался всегда, и, пока ему не задавали вопросов, в нем не было заметно никаких признаков жизни. Питался он редко: по его словам — раз в тысячелетие, если оставался в покое, и раз в неделю — в периоды напряженной деятельности. Он ел и двигался, вытягивая ложноножку, после чего ложноножка убиралась обратно, и Мешок вновь становился мешком с картошкой.

Вскоре оказалось, что имя «Мешок» было удачным и с другой точки зрения. Ибо Мешок был набит сведениями и — еще больше — мудростью. Вначале многие сомневались в этом: кое-кто так и не уверовал до самого конца, точно так же, как некоторые люди уже через столетия после Колумба продолжали считать, что Земля плоская. Но у тех, кто видел и слышал Мешок, не оставалось никаких сомнений. Они даже были склонны полагать, будто Мешок знает все. Это, конечно, было не так.

Официальная функция Мешка, узаконенная Сенатской комиссией по Межпланетным сообщениям, состояла в том, что он отвечал на вопросы. Первые вопросы, как мы видели, были заданы случайно капитаном Ганко.

Позже вопросы задавались намеренно, но цели их были сами по себе беспорядочны и случайны, и кое-кому из политиков удалось основательно обогатиться, прежде чем правительство положило конец утечке информации и упорядочило процесс задавания вопросов и получения ответов.

Время бесед с Мешком распределили на месяцы вперед и распродали неслыханно дешево, если принять во внимание прибыльность дел, ради которых эти беседы велись — всего по сто тысяч за минуту. Именно эта торговля временем привела к первой крупной склоке в правительстве.

Внезапно Мешок оказался не в состоянии ответить на вопрос, который для мозга его мощности должен был бы казаться весьма простым, и это вызвало второй взрыв такой силы, что его можно было бы назвать кризисом. Сто двадцать вопрошающих, каждый из которых уже уплатил свои сто тысяч, подняли вой, слышный на всех планетах. Началось официальное расследование, на котором Зиблинга подвергли допросу и которое обнажило перед публикой все склоки и противоречия внутри правительства.

Зиблинг оставил Мешок на попечение своего помощника, и теперь на заседании Сенатской комиссии он неловко поеживался перед наведенными на него кинокамерами. Допрос вел сенатор Хорриган — грубый, напыщенный, крикливый политикан.

— Вашей обязанностью является поддержание Мешка в состоянии, позволяющем получать ответы на вопросы, не так ли, мистер Зиблинг? — осведомился сенатор Хорриган.

— Да, сэр.

— Тогда почему Мешок оказался неспособным ответить на вопросы, заданные ему клиентами? Эти джентльмены честно заплатили свои деньги — по сто тысяч каждый. Насколько я понимаю, пришлось возместить им эту сумму. Это означает, что правительство потеряло... э, одну минуту... сто двадцать на сто тысяч... Сто двадцать миллионов! — раскатисто провозгласил он.

— Двенадцать миллионов, сенатор,— торопливо прошептал секретарь. Поправка принята не была, и число сто двадцать миллионов в должное время украсило газетные заголовки.

Зиблинг сказал:

— Как мы установили, сенатор, Мешок оказался неспособным отвечать на вопросы потому, что он не машина, а живое существо. Он выдохся. Ведь ему задавали вопросы двадцать четыре часа в сутки.

— Кто дал разрешение на такой идиотский порядок?! — загремел сенатор Хорриган.

— Вы сами, сенатор,— быстро сказал Зиблинг.— Порядок был установлен законом, внесенным вами и одобренным вашим комитетом.

Поскольку сенатор Хорриган не имел ни малейшего представления об этом законе, хотя и подписался под ним, его нельзя было, конечно, считать ответственным за те или иные положения указанного документа. Но в глазах общественного мнения такая ситуация подрывала его реноме. С этого момента он стал заклятым врагом Зиблинга.

— Следовательно, Мешок не отвечал на вопросы в течение целых двух часов?

— Да, сэр. Он возобновил ответы только после отдыха.

— И отвечал уже без каких-либо затруднений?

— Нет, сэр. Его ответы замедлились. Последующие клиенты жаловались, что у них мошеннически вымогают деньги. Но, поскольку ответы все же давались, мы не считались с этими жалобами, и финансовое управление отказало клиентам в возмещении убытков.

— Считаете ли вы, что обман клиентов, уплативших за свое время, честное дело?

— Это меня не касается, сенатор,— ответил Зиблинг, справившийся к этому моменту со своими нервами.— Я просто слежу за выполнением законов. Вопрос о честности я предоставлю разрешать вам. Полагаю, что в этом отношении вы безукоризненны.

Присутствующие рассмеялись, а

сенатор Хорриган вспыхнул. Он был непопулярен настолько, насколько может быть непопулярен политик, пока он еще остается политиком. Его не любили даже члены его партии, и среди смеявшихся были некоторые из его лучших политических друзей. Он решил изменить ход допроса.

— Правда ли, мистер Зиблинг, что вы часто не допускали клиентов, предъявлявших вам расписки в уплате необходимой суммы?

— Это так, сэр. Но...

— Вы признаете это?

— Дело здесь вовсе не в том, признаю я это или нет, сенатор. Я только хочу сказать...

— Не важно, что вы хотите сказать. Важно то, что вы уже сказали. Вы обманывали людей, уплативших деньги!

— Это неправда, сэр. Им давалось время позже. Причиной моего отказа дать им разрешение на немедленную консультацию с Мешком было то, что это время уже заранее было зарезервировано Управлением вооруженных сил. У них ведутся важные исследования и возникли кое-какие вопросы. Вы же знаете, что относительно порядка очередности в этом случае мнения разделились. Поэтому, когда возникает вопрос о том, кому идти первым, я никогда не беру ответственности на себя. Я всегда консультируюсь с правительственным советником.

— Таким образом, вы отказываетесь выносить собственное решение?

— Моя обязанность, сенатор, состоит в том, чтобы следить за самочувствием Мешка. Я не касаюсь политических вопросов. За три дня до того, как я покинул астероид, у нас было немного свободного времени — один из клиентов, уже уплативший деньги, задержался из-за аварии,— и тогда я задал Мешку вопрос...

— И вы, конечно, использовали это время в своих собственных интересах?

— Нет, сэр. Я спросил Мешок о наиболее эффективном режиме его работы. Из осторожности — я знал, что моему слову могут и не поверить,— я произвел звукозапись. Если желаете, сенатор, я могу продемонстрировать здесь эту звукозапись.

Сенатор Хорриган хрюкнул и махнул рукой.

— Продолжайте.

— Мешок ответил, что ему требуется два часа полного отдыха из каждых двадцати плюс добавочный час на то, что он называет развлечением. Под этим он подразумевает беседу с кем-нибудь, кто будет задавать, как он выражается, разумные вопросы и не станет торопить с ответами.

— И вы предлагаете, чтобы правительство тратило три часа из каждых двадцати — сто восемьдесят миллионов наличными?!

— Восемнадцать миллионов,— прошептал секретарь.

— Это время тратится не зря. Если Мешок переутомится, он преждевременно погибнет.

— Это вы так полагаете?

— Нет, сэр, это сказал Мешок.

Тут сенатор Хорриган пустился в разговоры о необходимости разоблачения преступных планов, и Зиблинга освободили от дальнейшего допроса. Были вызваны другие свидетели, но в конце концов Сенатская комиссия так и не смогла прийти к сколько-нибудь определенному решению, и было внесено предложение привлечь к расследованию сам Мешок.

Поскольку, однако, Мешок не мог явиться в Сенат, Сенату пришлось явиться к Мешку. Комитет семи не мог скрыть некоторого беспокойства, когда корабль затормозил и протянул причальные крючья к поверхности астероида. Каждому из членов Комитета уже приходилось путешествовать в пространстве, но раньше пунктами назначения были цивилизованные центры, и сенаторам, по-видимому, не улыбалась перспектива высадки на этой лишенной воздуха и света скалистой глыбе.

Представители телевизионных компаний были тут как тут. Они высадились и установили свои аппараты еще до того, как сенаторы сделали первые робкие шаги из безопасных кабин корабля.

Зиблинг отметил с усмешкой, что в

этой несколько пугающей обстановке, вдали от родины, сенаторы были гораздо менее самоуверенны. Ему предстояло играть роль доброжелательного экскурсовода, и он с удовольствием принялся за это дело.

— Видите ли, джентльмены,— сказал он почтительно,— по совету Мешка было решено обезопасить его от возможной угрозы со стороны метеоритов. Именно метеориты уничтожили целиком эту странную расу, и только по счастливой случайности последний ее представитель избег этой участи. Поэтому мы построили непробиваемый купол-укрытие, и теперь Мешок живет под его защитой. Клиенты консультируются с ним, используя телевизионную и телефонную связь, что почти так же удобно, как и личная беседа.

Сенатор Хорриган поспешил вцепиться в самый существенный пункт этого сообщения.

— Вы имеете в виду, что Мешок находится в безопасности, а мы подставлены под удары метеоритов?

— Разумеется, сенатор. Мешок — единственный в своем роде. Людей, даже сенаторов, много. Их всегда можно заменить путем выборов.

Сенатор позеленел от страха.

— Я думаю, это оскорбление — считать, что правительство не заботится о безопасности и здоровье своих служащих.

— Я тоже так думаю. Я живу здесь круглый год.— И Зиблинг добавил мягко: — Не желаете ли вы, джентльмены, взглянуть на Мешок?

Джентльмены уставились на телевизионный экран и увидели Мешок, который покоился на своем сиденье, похожий на дерюжный мешок с картофелем, сунутый на трон и забытый там. Он выглядел до такой степени неживым, что всем казалось странным, почему он остается в вертикальном положении и не валится набок. Тем не менее некоторое время сенаторы не могли сдержать чувства благоговейного ужаса, охватившего их. Даже сенатор Хорриган молчал.

Впрочем, это скоро прошло, и он заявил:

— Сэр, мы официальная следственная комиссия межпланетного Сената, и мы прибыли сюда, чтобы задать вам несколько вопросов.

Мешок не обнаружил никаких признаков желания ответить, и сенатор Хорриган, откашлявшись, продолжал:

— Правда ли, сэр, что вы требуете два часа полного отдыха из каждых двадцати часов и один час на развлечения, или — я, пожалуй, выражусь более точно — на успокоение?

— Это правда.

Хорриган ждал продолжения, но Мешок не в пример сенаторам не стал вдаваться в подробности. Один из членов Комитета спросил:

— Где же вы найдете индивидуума, способного вести разумную беседу со столь мудрым существом, как вы?

— Здесь,— ответил Мешок.

— Необходимо задавать конкретные вопросы, сенатор,— заметил Зиблинг.— Мешок обычно не говорит о том, о чем его не спрашивают специально.

Сенатор Хорриган поспешно сказал:

— Я полагаю, сэр, что когда вы говорите о подыскании интеллекта, достойного беседы с вами, вы имеете в виду одного из членов нашего Комитета, и я уверен, что из всех моих коллег нет ни одного, кто бы не был годен для этой цели. Но все мы не можем растрачивать наше время, необходимое для выполнения множества других обязанностей, и я хотел бы спросить вас, сэр, кто из нас, по вашему мнению, в особенности располагает мудростью, требуемой для этой огромной задачи?

— Никто,— сказал Мешок.

Сенатор Хорриган был смущен. Другой сенатор покраснел и спросил:

— Тогда кто же?

— Зиблинг.

Хорриган забыл о своем благоговении перед Мешком и вскричал:

— Это подстроено заранее!

Второй сенатор осведомился:

— А почему здесь нет других клиентов? Разве время Мешка не продано далеко вперед?

Зиблинг кивнул.

— Мне приказали аннулировать все заранее заказанные консультации, сэр.

— Какой болван это приказал?

— Сенатор Хорриган, сэр.

На том расследование, собственно, и закончилось. Прежде чем комиссия повернулась к выходу, сенатор Хорриган успел задать Мешку отчаянный вопрос:

— Сэр, буду ли я переизбран?

Крики возмущения, вырвавшиеся у его коллег, заглушили ответ Мешка, и только вопрос был услышан отчетливо и разнесен радиостанциями по межпланетному пространству.

Эффект этого происшествия был таков, что сам по себе явился ответом на вопрос сенатора Хорригана. Он не был переизбран. Но еще перед выборами он успел проголосовать против назначения Зиблинга на пост собеседника Мешка. Зиблинг все-таки был назначен четырьмя голосами против трех, и решение комиссии утвердил Сенат. А сенатор Хорриган исчез на время как из жизни Мешка, так и из жизни Зиблинга.

(Окончание следует)

Перевод с английского С. Бережкова

Ответы, указания, решения

[redacted]анный четырехугольник

Указания к упражнениям

1. Воспользуйтесь теоремой 1.

2. Воспользуйтесь свойством серединного перпендикуляра.

4. Примените формулу $S=\frac{abc}{4R}$ к двум треугольникам на рисунке 2 в статье, сделайте то же самое для другой пары треугольников. Полученные выражения для площади четырехугольника перемножьте и используйте теорему Птолемея.

5. Для доказательства свойства 2 проведите диаметр окружности, концом которого является одна из вершин стороны, расстояние до которой рассматривается в условии.

Указания к задачам

1. Докажите, что биссектрисы углов AED и AKB перпендикулярны.

2. Пусть радиус окружности равен R, а расстояния от точек P, Q и M до точки O (центра окружности) — a, b, c. Докажите, что $QP^2=a^2+b^2-2R^2$, $QM^2=b^2+c^2-2R^2$ и $PM^2=c^2+a^2-2R^2$. Проверьте теперь, что выполняется условие перпендикулярности OQ и PM (аналогично для остальных отрезков): $QP^2-QM^2=OP^2-OM^2$.

3. Докажите, что $\angle ABD=\angle DBM$ и $\angle AKB=\angle ABK$.

4. Докажите, что если L и P — точки пересечения прямых AM и AN с окружностью, то прямые BL, DP и MN пересекаются в одной точке. Заметьте теперь, что BL и DP — диаметры.

5. Воспользуйтесь тем, что произведение длин двух сторон треугольника равно произведению длины диаметра описанной окружности на длину высоты, опущенной на третью сторону.

[redacted]покажет динамометр?

1. $3F/5$ и $F/5$.
2. 2,8 м.
3. 10 Н.
4. 74,1 м.
5. $1+3{,}6\cdot10^{-7}$ м.

[redacted]сворд «КВАНТ»

По вертикали: 1. Преломление. 2. Колебание. 3. Транзистор. 4. Трансформатор. 5. Пар. 6. Фокус.

По горизонтали: 6. Фотон. 7. Молекула. 8. Орбита. 9. Изобара. 10. Кипение. 11. Нуклон.

[redacted]овский государственный [redacted]ерситет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $2\pi k$; $\pi(8k-1)/4$, $k\in Z$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\cos 2x - 2\sin 2x = 4\cos^2 x, \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

2. $[2/9;\ 1/2)$. Указание. Рассмотрите 2 случая: $0 < 2x < 1$ и $2x > 1$.

3. $1 + 3\pi/2$. Указание. Фигуры представляют собой часть круга с центром в точке $(2;\ -2)$ и радиусом $\sqrt{2}$, расположенную правее прямой $x = 1$ (эта прямая пересекает круг в точках $(1;\ -3)$ и $(1;\ -1)$).

4. mc/n. Указание. Продолжим AD до пересечения с окружностью в точке E (рис. 1). Треугольники ABC и ANM подобны. (У них угол A общий, а углы ANM и ABC равны, т. к. $\angle ANM = \angle AEM$ и $\angle AEM = \angle ABD$ как углы в подобных прямоугольных треугольниках BAD и EAM).

5. $p = -6$; $q = 7$. Мы наметим 2 решения этой задачи. Прежде всего заметим, что мы должны найти все значения p и q, для которых неравенство $|x^2 + px + q| \leqslant 2$ выполняется при всех $x \in [1;\ 5]$.

Указание к первому решению. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$, $x_b = -p/2$. Пользуясь свойствами монотонности функции f, получаем, что пара $(p;\ q)$ удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда она является решением совокупности из трех систем неравенств:

$$\begin{cases} x_b < 1, \\ f(1) \geqslant -2, \\ f(5) \leqslant 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_b > 5, \\ f(1) \leqslant 2, \\ f(5) \geqslant -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x_b \leqslant 5, \\ f(1) \leqslant 2, \\ f(5) \leqslant 2, \\ f(x_b) \geqslant -2. \end{cases}$$

Первые две из этих систем несовместны. Третья имеет единственное решение $p = -6$; $q = 7$.

Указание ко второму решению. Пусть точки x_1 и x_2 расположены правее (левее) x_b и таковы, что $|x_1 - x_2| \geqslant 2$. Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant 4$, причем равенство здесь возможно, только когда $|x_1 - x_2| = 2$ и одна из точек x_1 или x_2 совпадает с x_b. Докажем это. Пусть, для определенности, $x_1 - x_2 \geqslant 2$ и $x_2 \geqslant x_b = -p/2$. Тогда $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + p) \geqslant 2(2 + 2x_2 + p) \geqslant 4$. Аналогично рассматривается случай, когда точки x_1 и x_2 лежат левее x_b.

Из сказанного следует, что если x_b не совпадает с серединой отрезка $[1;\ 5]$ — точкой $x = 3$, на отрезке $[1;\ 5]$ найдутся точки x_1 и x_2, лежащие по одну сторону от x_b и такие, что $|x_1 - x_2| \geqslant 2$, т. е. такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > 4$. С другой стороны, должно быть $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1)| + |f(x_2)| \leqslant 4$.

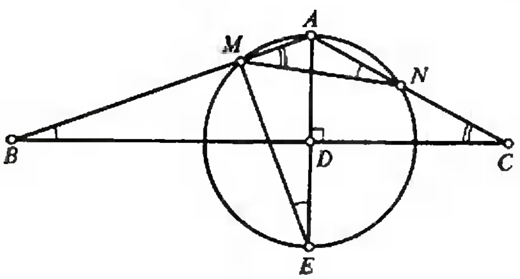


Рис. 1.

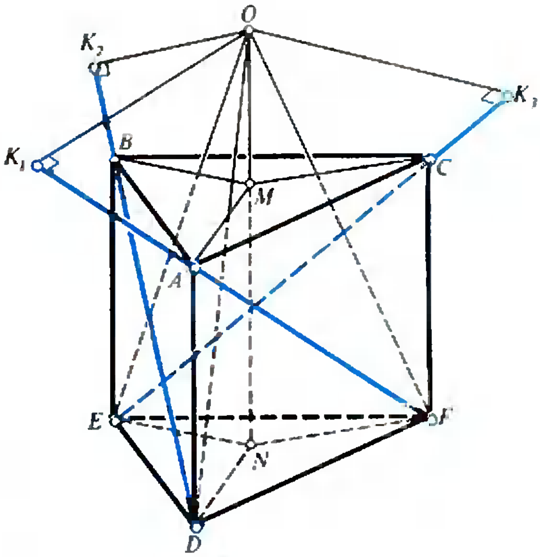


Рис. 2.

Противоречие. Итак, $x_b = 3$, т. е. $p = -6$, аналогично получаем, что $f(3) = -2$, т. е. $q = 7$.

6. 1. Пусть O — центр сферы, M, K_1, K_2, K_3 — точки касания сферы с плоскостью ABC и с продолжениями диагоналей FA, DB, EC соответственно (рис. 2). Пусть $AM = AK_1 = b_1$, $BM = BK_2 = b_2$, $CM = CK_3 = b_3$. Соединим центр сферы с вершинами D, E и F и обозначим $OD = c_1$, $EO = c_2$, $FO = c_3$. Пусть также диагональ боковой грани равна d, а радиус сферы — R.

Докажем, что M — центр окружности, описанной около треугольника ABC, т. е. что $b_1 = b_2 = b_3$. Из прямоугольных треугольников OK_1F, OK_2D, OK_3E получаем:

$$\begin{cases} (d + b_1)^2 + R^2 = c_3^2, \\ (d + b_2)^2 + R^2 = c_1^2, \\ (d + b_3)^2 + R^2 = c_2^2. \end{cases}$$

Предположим, что $b_1 < b_2$, тогда из полученной системы следует, что $c_3 < c_1$, но тогда по свойству проекций $b_3 < b_1$ и вновь из системы — $c_2 < c_3$, а по свойству проекций $b_2 < b_3$, т. е. $b_1 < b_2 < b_3 < b_1$, что невозможно. Следовательно, $b_1 \geqslant b_2$, но совершенно аналогично доказывается, что невозможно и неравенство $b_1 > b_2$, поэтому $b_1 = b_2$. Таким образом, $b_1 = b_2 = b_3$, описанная в условии сфера единственна и $c_1 = c_2 = c_3$.

Продолжим OM до пересечения в точке N с плоскостью DEF и обозначим через x длину бокового ребра. Имеем:

$d = \sqrt{3 + x^2}$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, $OF^2 = OK_1^2 + K_1F^2 = (7/2)^2 + (1 + \sqrt{3 + x^2})^2 = ON^2 + NF^2 = (x + 7/2)^2 + 1$. После упрощений получим уравнение $2\sqrt{3 + x^2} = 7x - 3$, откуда $x = 1$.

Вариант 2

1. 0.

2. $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $(1;\ 5^{\log_2 7}]$.

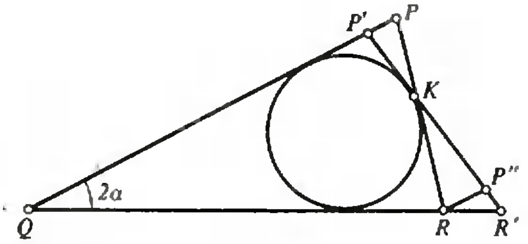


Рис. 3.

4. 6π. Указание. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, является вписанной в треугольник PQR. После этого исходная задача сводится к отысканию окружности наибольшего радиуса, вписанной в треугольник с данным углом $2\alpha = 2\arcsin{}^1/_3$ и данным полупериметром $p = 12\sqrt{2}$. Докажем, что при таких условиях наибольший радиус r будет иметь окружность, вписанная в равнобедренный треугольник PQR, у которого $\angle PQR = 2\alpha$, периметр равен $2l$ и $PQ = QR$.

Рассмотрим другой треугольник $P'QR'$ с той же вписанной окружностью. Пусть (для определенности) $R'P'$ пересекает RP в такой точке K, что $RK > PK$ (рис. 3). Проведем $RP'' \parallel QP$. Тогда $\triangle P''RK \sim \triangle KPP'$, причем коэффициент подобия больше 1. Это значит, что $S_{RKR'} > S_{RKP''} > S_{P'PK}$. Поэтому $S_{QP'R'} > S_{PQR}$. Отсюда следует, что периметр треугольника $QP'R'$ больше периметра треугольника PQR ($p = S/r$). В свою очередь, это означает, что радиус окружности, вписанной в треугольник, подобный треугольнику $QP'R'$ и имеющий тот же периметр $2l$, будет меньше, чем r.

Итак, осталось вычислить радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с данным периметром и углом при вершине.

5. Указание. Прежде всего заметим, что $f(x) = \max(h(x);\ g(x))$, где $h(x) = (x + 0{,}003)^{-0{,}45}$, $g(x) = 3(1-x)^{-0{,}48}$.

Рассмотрим функции $h_1(x) = 1/\sqrt{x}$, $g_1(x) = 3/\sqrt{1-x}$ и $f_1(x) = \max(h_1(x);\ g_1(x))$.

Очевидно, что $f(x) \leqslant f_1(x)$, так что $\min f(x) \leqslant \min f_1(x)$. Но $\min f_1(x)$ достигается в такой точке x_0, что $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}} = \dfrac{3}{\sqrt{1-x_0}}$, т. е. при $x_0 = 0{,}1$.

Это значит, что $\min f(x) \leqslant \min f_1(x) = \sqrt{10} < 3{,}17$

6. $3\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{201}}{22}}$. Из условия следует, что плоскости α и β параллельны, а среди боковых граней многогранника не меньше трех трапеций. Заметим, что трех или шести трапеций среди них быть не может (площади правильных треугольника и шестиугольника со сторонами $\sqrt{13}$ не равны 12). Аналогично исключается случай, когда к одной трапеции примыкают 2 треугольника: площадь квадрата со стороной $\sqrt{13}$ не равна 12. Невозможен и случай пяти трапеций: шестая боковая грань должна быть равнобедренным треугольником, поэтому все пять трапеций — равнобочные и продолжения всех их боковых сторон пересекаются в одной точке, чего быть не может, так как эта точка не совпадает с вершиной треугольника.

Итак, среди боковых граней восьмигранника 4 трапеции и 2 треугольника, и к каждой трапеции примыкает ровно один треугольник (рис. 4).

Высоты всех боковых граней равны, треугольники равнобедренные, и точки касания треугольных граней со сферой лежат на их высотах. Рассмотрим сечение сферы плоскостью CAH (рис. 5). Угол AOH — прямой, а треугольники OAE и HOE_1 подобны и потому

$$\frac{AE}{OE} = \frac{OE_1}{HE_1}, \text{ т. е. } HE_1 = R^2/AE.$$

Следовательно, $AH = AE + R^2/AE$.

Аналогично, $P_1E_1 = R^2/PE$ и $P_1P = PE + R^2/PE$.

Четырехугольник $ABCD$ — ромб. Продолжим B_1M и D_1N, B_1L и D_1K до пересечения в точках C_1 и A_1. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — тоже ромб. Ребра A_1A, B_1B, C_1C, D_1D либо пересекаются в одной точке, либо параллельны. Из подобия получаем

$$A_1D_1 = AD\cdot\frac{R^2}{PE^2};\quad A_1E_1 = AE\cdot\frac{R^2}{PE^2};\quad B_1D_1 = BD\cdot\frac{R^2}{PE^2}.$$

Аналогично, $D_1K = AD\cdot\dfrac{R^2}{AE^2}$, $KL = \dfrac{R^2}{PE^2}BD \times \left(1 - \dfrac{PE^2}{AE^2}\right)$. Вычисляя суммарную площадь треугольников и трапеций и пользуясь отношением площадей сферы и боковой поверхности многогранника, получаем (в зависимости от того, как «устроен» ромб $ABCD$), что либо (если $BD = 4$, $AE = 3$):

$$11R^4 - 153R^2 + 162 = 0,$$

либо (если $BD = 6$, $AE = 2$):

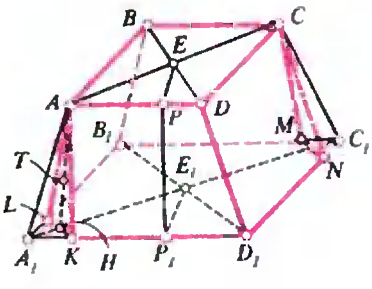


Рис. 4.

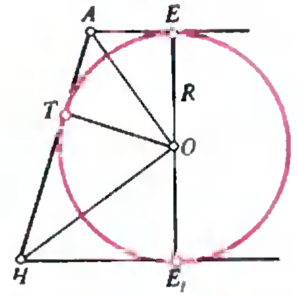


Рис. 5.

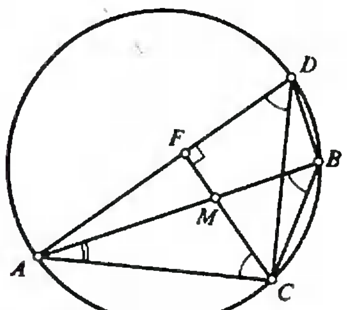


Рис. 6.

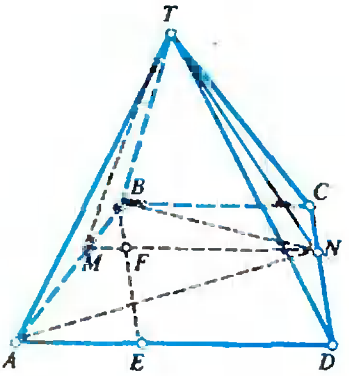


Рис. 7.

$$17R^4-136R^2+144=0.$$

Из четырех положительных корней полученных уравнений интервалу (3; 4) принадлежит лишь один.

Вариант 3

1. $\operatorname{arctg}(-4)+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

2. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 3. $((-3+\sqrt{5})/2;\ +\infty)$.

4. $\sqrt{a(a+b)}$. Указание. Треугольники ACD и ABD прямоугольные, и AD является диаметром окружности, описанной около этих треугольников (рис. 6). Далее $\angle ACF=\angle ADC$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), а $\angle ADC=\angle ABC$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AC. Отсюда следует, что $\triangle ACM\backsim\triangle ABC$. Из подобия следует, что

$$\frac{AM}{AC}=\frac{AC}{AB},$$

т. е. $AC^2=AM\cdot AB=a(a+b)$.

5. $\{0\}\cup(2+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{5})$. При $a=0$ единственный корень $x=0$ принадлежит интервалу $|x|<1$. При $a\neq 0$ уравнение имеет корни

$$x_1=\frac{1}{3a},\ x_2=-a(a-4),$$

удовлетворяющие условию $|x|<1$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\left|\dfrac{1}{3a}\right|<1,\\ -1<-a^2+4a<1.\end{cases}$$

6. $7/20$; $9dS/4$. Пусть $a=BC$, $b=AD$, $l=MB$, $c=MN$. По условию $AM=2l$. Проведем через точку B прямую, параллельную отрезку CD до пересечения с AD в точке E (рис. 7). Пусть F — точка пересечения отрезков MN и BE. Обозначим $u=MF$. Из подобия треугольников MBF и ABE следует соотношение

$$MF/AE=BM/BA,$$

откуда $u=(b-a)/3$ и, поскольку $MN=MF+FN$,

$$c=u+a=(b+2a)/3.$$

Отношение объемов V_a и V_b пирамид $TMBCN$ и $TAMND$ равно отношению площадей оснований:

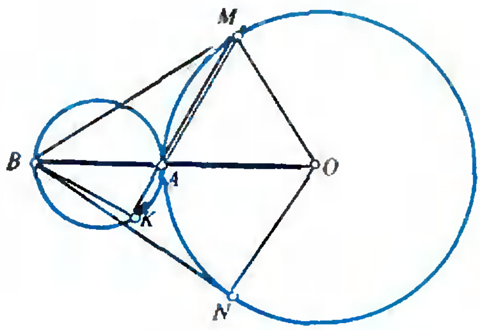


Рис. 8.

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}.$$

Проведя отрезки AN и BN, разделим трапеции $MBCN$ и $AMND$ на треугольники. Пусть $S_1=S_{\Delta MBN}$, $S_2=S_{\Delta BCN}$, $S_3=S_{\Delta AND}$. Так как по условию $\frac{BM}{MA}=\frac{1}{2}$, то $S_4=S_{\Delta AMN}=2S_1$.

Следовательно,

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{S_1+S_2}{2S_1+S_3}.$$

Поскольку

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{a}{c},\quad \frac{S_3}{2S_1}=\frac{b}{c},$$

то

$$\frac{S_1+S_2}{S_1}=\frac{a+c}{c},\quad \frac{2S_1+S_3}{S_1}=2\,\frac{b+c}{c}$$

и

$$\frac{S_1+S_2}{2S_1+S_3}=\frac{a+c}{2(b+c)}=\frac{5a+b}{2(4b+2a)}=$$

$$=\frac{5+b/a}{2(4b/a+2)}=\frac{7}{20}.$$

Итак, ответ на первый вопрос: $\frac{V_a}{V_b}=\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}$.

Выразим объемы V_2, V_3, V_4 соответственно пирамид $TBCN$, $TAND$, $TAMN$ через объем пирамиды $TMBN$.

Имеем

$$S_2+S_3=\frac{a+2b}{c}\,S_1=\frac{a+2b}{b+2a}3S_1=$$

$$=\frac{1+2b/a}{b/a+2}\,3S_1=\frac{5}{4}\,3S_1+\frac{15}{4}\,S_1.$$

По условию $V_1=\frac{1}{3}\,dS$.

Следовательно, объем V исходной пирамиды $TABCD$ равен

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4=3V_1+V_2+V_3=$$

$$=V_1\left(3+\frac{V_2+V_3}{V_1}\right)=V_1\left(3+\frac{S_2+S_3}{S_1}\right)=$$

$$=\frac{27}{4}\,V_1=\frac{9}{4}\,dS.$$

Вариант 4

1. $\max f(x)=f(0)=1/2$, $\min f(x)=f(-2/3)=-1/2$.
2. $(-\infty;\ -3)\cup(-1/3;\ \infty)$.
3. $(1;\ 1)$; $(5/2;\ -2)$. *Указание.* Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} u+v=3,\\ uv=2,\end{cases}$$

где $u=\sqrt{2x-1}$, $v=\sqrt{y+3}$.

4. $\pi/4+\pi k/2$, $k\in Z$. *Указание.* Уравнение приводится к виду $\cos^2 2x=(1+\cos 2x)(\cos 8x-1)$, откуда получаем равносильную ему систему

$$\begin{cases} \cos 2x=0,\\ \cos 8x=1.\end{cases}$$

5. $4\sqrt{3}+10\pi$. Из прямоугольного треугольника MKB (рис. 8) найдем $MB=MK/\cos 15^\circ=2$. В равнобедренном треугольнике AOM имеем: $\angle AOM=180^\circ-2\angle AMO=180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ$, следовательно, $OM=MB/\mathrm{tg}\,30^\circ=2\sqrt{3}$. Искомая площадь равна сумме $S_{BMON}+5S/6$, где $S_{BMON}=2\cdot S_{BMO}=4\sqrt{3}$, S — площадь круга радиусом OM, т. е. $S=12\pi$.

Вариант 5

1. $(\log_2 5-2)^2$.
2. $2\pi k/5$, $\pi/4+\pi k$, $\pi/6+2\pi k/3$; $k\in Z$.
3. 8 мин 20 с. Промежутки времени, за которые велосипедист проходит километровые отрезки, образуют арифметическую прогрессию (t_k), поэтому $t_1+t_5=t_2+t_4=2t_3$. Отсюда $t_1+\ldots+t_5=\frac{5}{2}(t_2+t_4)=500$ с.
4. $48/5$. Пусть ON и EP перпендикулярны BC и AD (рис. 9). Из подобных треугольников OBC и OMA находим: $AM=BC(AO/OC)=9$, $ON/(7-ON)=BC/AM=2/3$, откуда $ON=14/5$. Далее, $DM=AM-AD=1$, из подобных треугольников ECB и EDM имеем $EP/(7-EP)=BC/DM=6$, откуда $EP=6$. Наконец, $S_{OEC}=S_{BEC}-S_{BOC}=(EP-ON)BC/2$.
5. 1. Второе уравнение системы приводится к виду

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z=a+1.$$

Отсюда и из вида остальных уравнений системы следует, что если $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ — решение системы, то и $x=y_0$, $y=x_0$, $z=z_0$ — тоже ее решение. Поэтому единственным может быть только решение, в котором $x=y$. Положив в системе $y=x$, преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} (2+x^2)\sin 2x=0,\\ 2(x-1)^2+z^2=a+1,\\ (2x+a\cdot\sin^2 z)((1-a)\ln(1-x^2)+1)=0.\end{cases}$$

Поскольку из последнего уравнения системы следует, что $|x|<1$, то из первого уравнения получаем $x=0$. При этом два последних уравнения принимают вид

$$\begin{cases} z^2=a-1,\\ a\cdot\sin^2 z=0.\end{cases}$$

Из четности функций z^2 и $\sin^2 z$ следует, что единственным решением этой системы может быть только решение $z=0$, т. е. должно быть $a=1$. Итак, единственным решением исходной системы может быть только решение $x=0$, $y=0$, $z=0$ и для этого необходимо, чтобы было $a=1$.

Положив $a=1$ в исходной системе, получим

$$\begin{cases} z\cdot\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0,\\ x^2+(y-1)^2+z^2=1+2x,\\ x+y+\sin^2 z=0.\end{cases}$$

Из двух последних уравнений получим уравнение

$$x^2+y^2+z^2+\sin^2 z=0,$$

имеющее единственное решение $x=y=z=0$, которое удовлетворяет остальным уравнениям системы.

Вариант 6

1. -1.
2. 1 час 20 мин, 40 часов, 10 часов. Пусть площадь поля равна S и пусть x, y, z — искомые времена для первой, второй и третьей сенокосилок соответственно; они находятся из системы

$$\begin{cases} 10(S/x+S/y)=S,\\ 8(S/y+S/z)=S,\\ 5(S/x+S/y+S/z)=S.\end{cases}$$

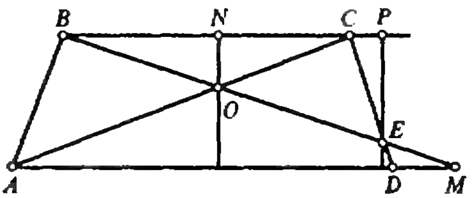


Рис. 9.

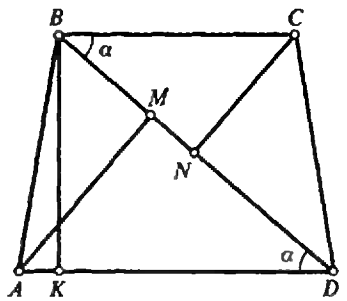


Рис. 10.

3. $2\pi k$, $-3\pi/4+2\pi k$, $k\in Z$.

4. $\sqrt{15}/2$. Пусть $\angle CBD=\angle BDA=\alpha$, KB — высота трапеции (рис. 10). Выразим через α отрезки BM и DN. Поскольку

$$BN=BC\cos\alpha=3\cos\alpha,\ BD=KD/\cos\alpha=7/(2\cos\alpha),\ DM=AD\cos\alpha=4\cos\alpha,$$

имеем

$$BM=BD-DM=7/(2\cos\alpha)-4\cos\alpha,$$
$$DN=BD-BN=7/(2\cos\alpha)-3\cos\alpha.$$

Тогда

$$BM/DN=(7-8\cos^2\alpha)/(7-6\cos^2\alpha).$$

Получаем уравнение

$$(7-8\cos^2\alpha)/(7-6\cos^2\alpha)=2/3,$$

откуда

$$\cos^2\alpha=7/12$$

и

$$CN=BC\cdot\sin\alpha=\sqrt{15}/2.$$

5. $-a^3/3-a^2/2$ при $a<-1$, $-1/6$ при $-1\leqslant a<0$. Пусть $z=x-a$ и $-a=n$. Требуется найти наименьшее значение функции $y=z^3/3-z^2/2$ на отрезке $[n;\ n+1]$ для каждого $n>0$. Так как $y'=z^2-z$ и $y'=0$ при $z=0$ и при $z=1$, то при $n>1$ отрезку $[n;\ n+1]$ ни одна критическая точка функции $y(z)$ не принадлежит, а при $0<n\leqslant1$ ему принадлежит только $z=1$. При $0<z<1$ функция $y(z)$ убывает (т. к. $y'<0$), а при $z>1$ возрастает ($y'>0$). Поэтому при $n\geqslant1$ наименьшее значение $y(z)$ принимает в левом конце отрезка $[n;\ n+1]$: $y_{\min}=y(n)=n^3/3-n^2/2$, а при $0<n\leqslant1$ — в критической точке $z=1$: $y_{\min}=y(1)=-1/6$.

Вариант 7

1. $\frac{\pi}{14}(2k+1)$, πk; $k\in Z$.

2. 2; 3. 3. $\{0\}\cup(16;\ \infty)$. 4. $5^{\pm\sqrt{\log_3(2+\sqrt3)}}$

5. Указание. Докажите, что $\angle AED=\angle ABD-\angle BAC$.

6. $x=4$ при $a<-1$; $x\geqslant4$ при $a=-1$; $x_1=4$, $x_2=(4a-8)/(a+1)$ при $-1<a<1$; $-2\leqslant x\leqslant4$ при $a=1$; $x=4$ при $a>1$.

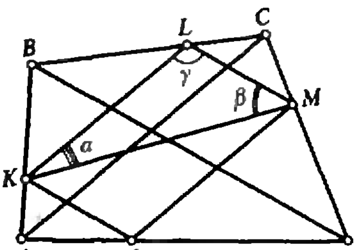


Рис. 11.

Вариант 8

1. $\pm\arccos(-1/4)+2\pi k$; $k\in Z$.
2. $(5;\ 6]$.
3. $a_1=a_2=a_3=7$; $a_1=7(1-\sqrt2)$, $a_2=7$, $a_3=7(1+\sqrt2)$; $a_1=7(1+\sqrt2)$, $a_2=7$, $a_3=7(1-\sqrt2)$.
4. 24. Указание. Площадь треугольника EGC равна 1/3 площади треугольника ABC.
5. $|a|\geqslant5\sqrt5/4$. Указание. Выражая y из второго уравнения и подставляя в первое, приходим к уравнению $8x^3-16x^2-25=0$. Оно преобразуется к виду $(2x-5)(4x^2+2x+5)=0$, откуда $x=5/2$; $y=5/4$.

Вариант 9

1. $\log_2\left(\frac12+n\right)$, $\log_2\left(\frac1{12}+n\right)$, $\log_2\left(\frac5{12}+n\right)$, $n=0, 1, 2, \ldots$
2. $[-1/6;\ 1/2)$.
3. $3(\sqrt5\pm1)/2$. Указание. Необходимо рассмотреть 2 случая: когда центр окружности лежит вне прямоугольника и когда он лежит внутри прямоугольника.
4. $\min F(r)=F(5/2)=-7/16$. Указание. Выполнив замену $x=r^2-5r+6$, исследуйте полученную квадратичную функцию при $x\geqslant-1/4$.
5. $\frac{\pi}{2}+1$. Указание. Переписав неравенство в виде

$$\left(\left(x-\frac12\right)^2+\left(y-\frac12\right)^2-\frac12\right)(x^2+y^2-1)\leqslant0,$$

убедитесь, что данная фигура есть объединение двух кругов без их общей части.

6. 0; 2; $(3+\sqrt5)/2$. Указание. Выполнив замену $y=\sin x$, приведем данное уравнение к квадратному. Пусть его корни y_1 и y_2. 3 корня на отрезке $[0;\ 2\pi]$ исходное уравнение может иметь лишь в следующих случаях:

а) когда оно сводится к уравнению $\sin x=0$,
б) когда $\sin x=1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x=y_2$,
в) когда $\sin x=-1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x=y_2$.

Вариант 10

1. $(0;\ 2)$.
2. $2\pi k$, $-\pi/4+\pi k$; $k\in Z$.
3. $(81;\ 0)$. Указание. Из первого уравнения получаем $\log_3 x+y=3+2^y$ и затем из второго уравнения находим, что $(3+2^y)\cdot2^y=4$, откуда $y=0$.
4. 189/25.

Проведем $MN\parallel AC$ (рис. 11), тогда $KLMN$ — параллелограмм. Из подобия треугольников ABC и KBL, BCD и LCM, CDA и MDN, DAB и NAK и известных отношений их сходственных сторон получим, что сумма $S_{AKN}+S_{KBL}+S_{LCM}+S_{MDN}$ равна $(5/9)\ S_{ABCD}$. С другой стороны, эта же сумма равна $S_{ABCD}-S_{KLMN}$. Отсюда $S_{ABCD}=(9/4)\cdot S_{KLMN}$. В треугольнике KLM выполняются равенства: $2R=LM/\sin\alpha=KL/\sin\beta=KM/\sin\gamma$, $R=5/2$ — радиус описанной окружности. Отсюда $\sin\alpha=3/5$, $\sin\beta=4/5$. Тогда либо $\sin\gamma=\sin(\alpha+$

$+\beta)=1$, но при этом $KM=5>4=KL$, что противоречит условию, либо $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=7/25$, тогда $KM=7/5<4=KL$. Следовательно,

$$S_{KLMN}=2S_{KLM}=KL\cdot LM\sin\gamma=84/25.$$

5. $0,\ \pm(\sqrt{5}/2)a$.
Перепишем уравнение в виде

$$\cos(f(x+a/2))=\cos(f(x-a/2)),$$

где $f(z)=z/(z^2+a^2)$. Оно равносильно совокупности уравнений

$$f(x+a/2)\pm f(x-a/2)=2\pi k,\ k\in Z.$$

Функция f всюду определена, непрерывна, имеет производную $f'=(a^2-z^2)/(z^2+a^2)^2$, равную нулю при $z=\pm a$, причем $z=-a$ — точка минимума, а $z=a$ — максимума, и

$$f_{\min}=f(-a)=-1/(2a)\geqslant-\pi,$$
$$f_{\max}=f(a)=1/(2a)\leqslant\pi$$

при $a\geqslant1/(2\pi)$. Так как точки $z_1=x+a/2$ и $z_2=x-a/2$ ни при каких x не могут быть одновременно точками экстремума, то

$$|f(z_1)\pm f(z_2)|\leqslant|f(z_1)|+|f(z_2)|<2\pi,$$

поэтому возможен только случай $k=0$. Следовательно, при $a\geqslant1/(2\pi)$ исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x+a/2)+f(x-a/2)=0,\\ f(x+a/2)-f(x-a/2)=0,\end{array}\right.$$

в свою очередь равносильной совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x(3a^2/4+x^2)=0,\\ a(5a^2/4-x^2)=0.\end{array}\right.$$

Отсюда $x_1=0$, $x_2=a\sqrt{5}/2$, $x_3=-a\sqrt{5}/2$.

Вариант 11

1. 3. 2. 72. 3. $90°+180°n$, $n\in Z$. 4. 35; 45. 5. $(0;\ 1/7)\ \ (1/2;\ 1)$. 6. $\{-\sqrt{2}\}\ \ (-1;\ 1)$.

Вариант 12

1. $11\cdot181$. 2. $\log_2 3$. 3. $(-\infty;\ -199)\cup(-66;\ 200)$. 4. $\pi+2\pi k$, $2\operatorname{arctg}(\pi/2)+2\pi k$, $k\in Z$.
5. $2\sqrt{3}$. Через две данные точки C и D могут проходить две окружности, касающиеся данной прямой AB. Обозначим точки касания буквами E_1 и E_2 (рис. 12). Продолжим DC до пересечения в точке G с прямой AB. Докажем, что расстояния от точек E_1 и E_2 до прямой CD одинаковы. Для этого достаточно доказать, что $E_1G=E_2G$. Так как треугольник GCE_1 подобен треугольнику GE_1D, а треугольник GCE_2 — треугольнику GE_2D (это следует из равенств углов GCE_1 и GE_1D, GCE_2 и GE_2D, измеряемых половинами дуг E_1CD и E_2CD соответственно), то $GC/GE_1=GE_1/GD$, $GC/GE_2=GE_2/GD$, откуда $GE_1^2=GE_2^2=GC\cdot GD$, что и требовалось доказать. Пусть E_1F перпендикулярно CD. Тогда $E_1F=GE_1\cos\angle GE_1F$, но $\angle GE_1F=\angle GDA$, поэтому $E_1F=GE_1\cdot AD/GD=\sqrt{GC\cdot GD}\cdot AD/GD=AD\sqrt{GC/GD}=AD\sqrt{BC/AD}=2\sqrt{3}$, т. к.

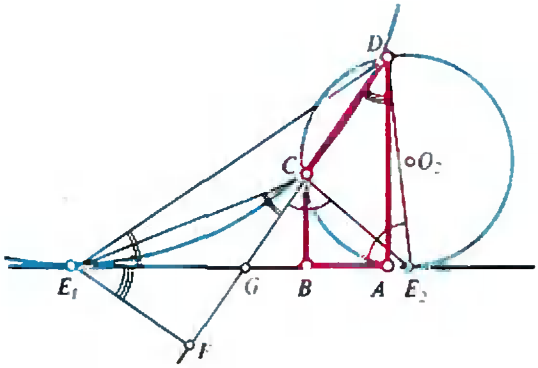


Рис. 12.

$GC/GD=BC/AD$ вследствие подобия треугольников GCB и GDA.
6. $(-\infty;\ -0{,}99)\cup(-0{,}02;\ 0)\cup(0;\ 0{,}01)$.
Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x-p<1,\\ x^3>(x-p)^2\end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} x-p>1,\\ 0<x^2<(x-p)^2,\end{array}\right.$$

в свою очередь равносильной совокупности двух систем:

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x-p<1,\\ |x|>x-p\end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} x-p>1,\\ 0<|x|<x-p.\end{array}\right.$$

При $|x|<0{,}01$ она равносильна совокупности двух систем неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} |x|<0{,}01,\\ 0<x-p<|x|\end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} |x|<0{,}01,\\ x-p>1.\end{array}\right.$$

Если при каком-то значении p система

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x-p<|x|,\\ |x|<0{,}01\end{array}\right.$$

имеет решение, то $-0{,}02<x-|x|<p<x<0{,}01$; наоборот, если число p принадлежит интервалу $(-0{,}02;\ 0{,}01)$, то система имеет решение при всех таких p, кроме $p=0$. Аналогично система

$$\left\{\begin{array}{l} x-p>1,\\ |x|<0{,}01\end{array}\right.$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $p<x-1<-0{,}99$.

Физика

Механико-математический факультет

1. $\Delta m=(m_1-m_2)^2/(m_1+m_2)\approx16{,}7$ г.
2. $\Delta E_p=(M-m)gh+\mu gh(H-h)=55$ кДж.
3. $h_2=\rho_в(h_1+h_3)/(3\rho)=10$ мм, где $\rho_в=10^3$ кг/м^3 — плотность воды.
4. $T=Ph(H-h)/(\nu R(H-2h))=352$ К, $t=79$ °C.
5. $\Delta m=pVM_{H_2}/(RT)-mM_{H_2}/M_{H_2O}\approx77$ г.
6. $m=AT_2/(\lambda(T_1-T_2))\approx8{,}2$ кг.
7. $U_4=\dfrac{C_1C_3U}{C_3C_4+(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\approx9{,}1$ В.
8. Сила направлена вдоль скорости проводника и равна $F=B^2l^2v/R=1{,}6\cdot10^{-4}$ Н.
9. $l=F\sqrt{F^2+d^2}(1/(a-F)-1/(b-F))$.
10. $L=4F$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $l=2s/(1-\alpha)=0{,}75$ м.
2. $\beta=\alpha m_1/(m_2+2\alpha(m_1-m_2))=1/3$.
3. $v=(1+M/m)\sqrt{2\mu gl}=502$ м/с.
4. $x_m=\dfrac{2v_0}{1+M/m}\sqrt{\dfrac{M}{k}}=0{,}4$ м.
5. $\rho_{\min}=\rho_0 M/(M+\rho_0 Sh)=0{,}8$ г/см^3.
6. $m=M((v_2^2-v_1^2)/2+\mu gL)/(\eta g)\approx 23{,}8$ кг (здесь $\eta=0{,}3$).
7. $l=V\Delta T/(ST)=10$ см.
8. $h=MVg(p_2-p_1)/(RTk)=2{,}4$ см.
9. $\alpha=\sqrt{1+2MA/(3mRT)}=1{,}1$.
10. $r=\dfrac{I_1R_1-I_2R_2}{I_2(1+R_2/R_1)-I_1}=4$ Ом.

Химический факультет

1. $h=R/\sqrt{1+\mu^2}=1$ м.
2. $F=mg(1+(2\pi v)^2/(gT)^2)\approx 0{,}23$ Н.
3. $\beta=\arcsin(v\sin\alpha/\sqrt{v^2-2c\Delta T})\approx 45^\circ$.
4. $t=0$ °С, при этом растает $m=(c_1m_1t_1-c_2m_2t_2)/\lambda=57$ г льда.
5. $n=mgh/((Q_н/T_н)(T_н-T_х))=80$.
6. $\alpha=1/2\arcsin(eLU/(mdv^2))\approx 10^{-2}$ рад.
7. $R_2=R_1R_4R_5/(R_3R_5-R_1R_4)\approx 33{,}3$ Ом.
8. $a=(4\rho Q/(NS(\Delta B/\Delta t)^2))^{1/3}=0{,}1$ м.
9. $x=l(\sqrt{2}-1)/2\approx 0{,}09$ м.
10. $x=fFR/(hF+fR-RF)=0{,}08$ м.

Географический факультет

1. $s=(v_0^2\cos^2\alpha(t_2-t_1)^2+(v_0\sin\alpha(t_2-t_1)+g(t_1^2-t_2^2)/2)^2)^{1/2}\approx 18$ м (здесь $t_1=1$ с, $t_2=2$ с).
2. $A_{\min}=mg(l\sin\alpha+d\cos\alpha-d)/2=3750$ Дж.
3. $\rho=\rho_0 m_1/(m_1-m_2)=2{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3.
4. $U_V=2UR_V/(R+4R_V)=50$ В.
5. $S=2\rho lI/(U_к-U)\approx 14{,}5$ мм^2.
6. $I_{\min}=\mu mg/(Bl(\sin\alpha+\mu\cos\alpha))\approx 2{,}2$ кА.
7. $U=\sqrt{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}=8$ В.
8. $v=\sqrt{(2v_1)^2+v_2^2}=5$ см/с.
9. $F=d(l_1+l_2)/(2d+l_1+l_2)=0{,}1$ м.
10. $P=nhc/(\eta\lambda)=40$ Вт (здесь $\eta=0{,}1$).

[redacted]нт» для младших школьников
«Квант» № 1)

1. Обозначим количество проданных персиков через n, а стоимость (в копейках) персиков, проданных ранее, через A. Тогда $A+230=245n$ и $A+158n=242n$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $72=3n$. Следовательно, было продано 24 персика.
2. См. рис. 13.
3. $3\times 29+13=100$.
4. Так как углы NAD и MBA равны (рис. 14), а также углы MCD и NBC равны, то сумма углов при вершинах A, B и C равна углу ABC, т. е. 90°.
5. Обозначим через x время (в часах), прошедшее с начала суток. Тогда ответ Пифагора запишется следующим образом: $24-x=0{,}8x$. Отсюда $x=40/3$ часа, т. е. 13 часов 20 минут.

Т	А	Б	У	Н
У	Н	Т	А	Б
А	Б	У	Н	Т
Н	Т	А	Б	У
Б	У	Н	Т	А

Рис. 13.

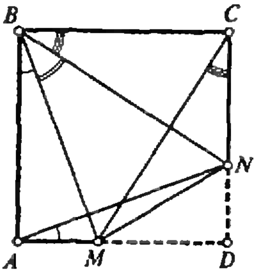


Рис. 14.

[redacted]урс «Математика 6—8»
«Квант» № 10 за 1991 г.)

4. Заметим, что для любой расстановки скобок, при представлении полученного числа в виде дроби, число 1 окажется в числителе, а число 2 — в знаменателе. Отсюда получаем три возможных выражения числа 7:

$$7=\frac{1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 10}=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 9}.$$

Этим выражениям соответствуют следующие расстановки скобок:

$$7=((((1:2):3):4):5):((((6:7):8):9):10)=$$
$$=1:((2:(3:(((4:5):6):7))):((8:9):10))=$$
$$=1:((2:3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10))).$$

5. Такая укладка возможна. Пример укладки показан на рисунке 15.

6. Примем сторону равностороннего треугольника равной 2 и обозначим длины отрезков AC_1, BA_1 и CB_1 через $1+a$, $1+b$ и $1+c$, соответственно. Тогда длины отрезков C_1B,

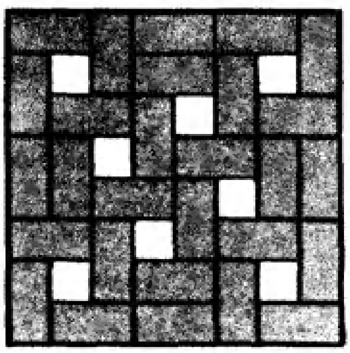


Рис. 15.

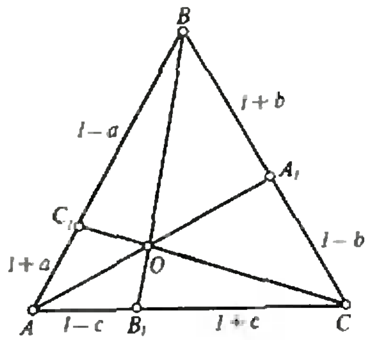


Рис. 16.

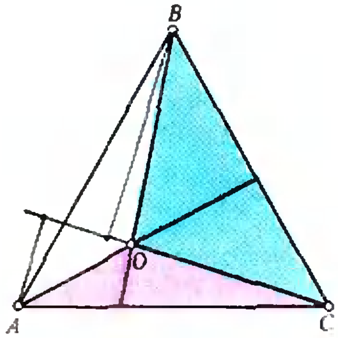


Рис. 17.

A_1C и B_1A равны $1-a$, $1-b$, $1-c$ (рис. 16). Заметим, что сумма площадей треугольников ABB_1, BCC_1 и CAA_1 равна полутора площадям треугольника ABC. Если обозначить высоту треугольника ABC через h, то это равенство можно переписать следующим образом:

$$0{,}5h(1+a)+0{,}5h(1+b)+0{,}5h(1+c)=1{,}5h,$$

или $a+b+c=0$.

С другой стороны, отношение площадей треугольников AOC и BOC равно $(1+a):(1-a)$, так как у этих треугольников общее основание OC, а высоты относятся, как $(1+a):(1-a)$ (рис. 17). Аналогично, отношение площадей треугольников BOA и AOC равно $(1+b):(1-b)$, а отношение площадей треугольников BOC и AOB равно $(1+c):(1-c)$. Перемножим эти отношения и заметим, что площадь каждого из трех треугольников AOB, AOC и BOC по одному разу встречается в числителе и в знаменателе, т. е. это произведение равно 1. Отсюда $(1+a)(1+b)(1+c)=(1-a)(1-b)(1-c)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $(a+b+c)+abc=0$. Но $a+b+c=0$, следовательно, $abc=0$. Это означает, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю, т. е. точка O лежит на одной из медиан.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Номер подготовили:
Л. Винокова, А. Егоров, Л. Кардасевич, С. Коновалов, Е. Коршунова, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин, Э. Назаров, П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1. «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 25.11.91. Подписано к печати 21.02.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт 27,09. Уч.-изд. л. 7,59.
Тираж 88 500 экз. Заказ 3005 Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ПАРТИИ ЧЕМПИОНОВ

В прошлый раз мы рассказали об XI чемпионате мира среди шахматных микрокомпьютеров. Он определил сразу нескольких чемпионов (в разных «весовых» категориях), но по-прежнему на высоте положения оказался многократный чемпион «Мефисто». Приведем теперь наиболее интересные партии турнира в Ванкувере.

«М-Чесс» — «Мефисто»
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. Кf3 Кf6 4. e3 e6 5. С:c4 c5 6. 0—0 a6 7. a4 Кc6 8. Фe2 cd 9. Лd1 Сe7 10. ed 0—0 11. Кc3 Кd5 12. Кe5 Кcb4 13. Сb3 Сf6 14. Сd2 b6 15. К:d5 К:d5 16. Сc2 Сb7 17. Фe4 g6 18. Сh6 Лe8 19. Лac1 Лc8 20. Лe1 Фe7 21. Сb3 Лed8 22. Л:c8 Л:c8 23. Кg4 a5 24. К:f6+ К:f6? 25. Фe5 Кe8 26. d5! Классический прорыв в центре, решающий партию. 26...Фb4 27. Фe3! Сa6 (27...ed 28. Ф:e8+) 28. de f6 29. e7+ Сc4 30. С:c4+ Ф:c4 31. Ф:b6 Фd5 32. h3 Крf7 33. b4 ab 34. Ф:b4 Лc7 35. Сd2 Фa2 36. Фh4 h5 37. Фd4 Лc2 (37...Л:e7 38. Л:e7+ Кр:e7 39. Сb4+ Крf7 40. Фd7+) 38. Сc3 Фb3 39. Лe3 Фb1+ 40. Сe1 Фb7 41. a5 Лc7 42. Фd8 Л:e7 43. a6 Л:e3 44. ab Л:e1+ 45. Крh2 Лb1 46. b8Ф. Черные сдались.

«Мефисто» — «Гидеон»
Защита Каро-Канн

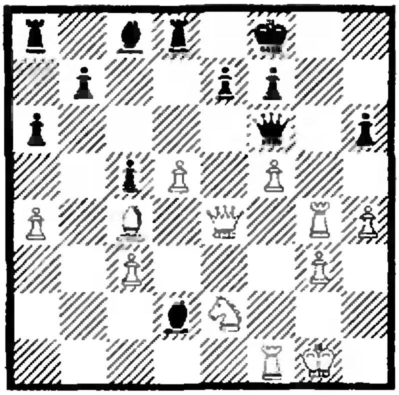
1. e4 c6 2. d4 d5 3. Кc3 de 4. К:e4 Сf5 5. Кg3 Сg6 6. Сc4 e6 7. К1e2 Кf6 8. Кf4 Сd6 9. Сb3 Фc7 10. Фf3 Кbd7 11. 0—0 a5 12. c3 c5 (надежнее 12...0—0) 13. С:e6!? fe 14. К:e6 Фb6 15. К:g7+ Крf7 16. К7f5 cd 17. cd С:g3 18. Кh6+ Крg7 19. Ф:g3 Лhe8 20. Лd1 Крh8 21. b3 Лac8? Плохо и 21...Ф:d4 из-за 22. Сe3 Фe5 23. Фh4 Фh5 24. Ф:h5 С:h5 25. g4 Сg6 26. Сd4. Но, блокируя пешку «d» путем 26...Кd5!, черные держали позицию.

22. d5! Вновь маневр d4—d5 ведет к цели, но на сей раз «Гидеон» выступает в роли пострадавшей стороны.

22...Лe2 23. Сe3 Фb5 24. Сd4 Лce8 25. Сc3 Фb6 26. d6 Фd8 27. Фg5 b6 28. f4! Лf8 29. f5 Сe8 30. Лe1 Сh5 (30...Л:e1+ 31. Л:e1 с угрозой Лe7) 31. Ф:h5. Черные сдались.

«Гидеон» — «М-Чесс»
Защита Грюнфельда

1. d4 Кf6 2. c4 g6 3. Кc3 d5 4. cd К:d5 5. e4 К:c3 6. bc Сg7 7. Сc4 c5 8. Кe2 0—0 9. 0—0 Кc6 10. Сe3 Фc7 11. Лc1 Лd8 12. Сf4 Фd7 13. d5 Кe5 (лучше 13...Кa5) 14. С:e5 С:e5 15. f4 Сg7 16. Лb1 Фc7 17. f5 gf 18. ef a6 19. a4 Сe5 20. g3 Сf6? 21. Лf4 Сg5 22. Лg4 h6 23. Фc2 Фe5 24. Лf1 Крf8 25. Фe4!? Фf6? Черные кое-как выдержали давление неприятельских фигур и, разменяв ферзей, могли получить вполне приемлемую позицию. Теперь же «Гидеон» эффектной атакой завершает борьбу. 26. h4 Сd2.



27. Лg6! Фh8 28. d6! ed 29. С:f7! Кр:f7 30. Фd5+ Крf8 31. Ф:d2 Крe8 32. Лe1 Крf7 33. Фd5+ Крf8 34. Кf4. Черные сдались.

Итак, «М-Чесс» обыграл «Мефисто», тот взял верх над «Гидеоном», который в свою очередь одолел «М-Чесс». А расположение компьютеров в турнирной таблице решили их схватки с другими соперниками. В заключение приведем еще одну интересную партию победителя турнира.

«Кинг» — «Гидеон»
Дебют Берда

1. b3 c6 2. a4 d5 3. Сb2 Сf5 4. f4 Кf6 5. Кf3 e6 6. e3 Сb4 7. Сe2 0—0 8. Кh4 Сe4 9. 0—0 Сc5 10. Кc3? d4! Белые несколько вычурно разыграли дебют, и «Гидеон» захватывает инициативу. 11. К:e4 К:e4 12. Кf3 de 13. d4 Сd6 14. Фd3 Кf6 15. Кe5. После 15. Ф:e3 Кd5 теряется пешка f4.

15...Кd5 16. c4 Кb4 17. Фc3 (а сейчас нельзя бить на e3 из-за ответа Кc2) 17...Фc7 18. Кg4 f5! Черные не попадаются в ловушку: 18...С:f4 19. d5! f5 20. Л:f4.

19. Кe5. Вновь пешка неуязвима: 19. К:e3 С:f4 20. К:f5 ef 21. Ф:b4 С:h2+. Кажется, что теперь пешке «e» никуда не деться (грозит, например, Лf1—f3:e3), но «Гидеон» все предвидел! 19...c5! 20. dc С:c5 21. Лfd1 К4c6 22. b4! Наконец-то белые уничтожают прорвавшуюся пешку «e», но восстановить материальное равенство так и не удается. 22...С:b4. После 22...К:b4 черные неожиданно терпят фиаско: 23. Кd7! Лf7 24. К:c5 Ф:c5 25. Лd8+.

23. Ф:e3 Фe7 24. Кd3 Кd7 25. К:b4 К:b4 26. Лab1 a5 27. Сc3 Кc5 28. С:b4 ab 29. Л:b4 Л:a4 30. Л:a4 К:a4. Итак, позиция упростилась, но у черных осталась лишняя пешка. 31. g3 Кc5 32. Сf3 Лa8 33. Лd2 Крf7 34. Крg2 h6 35. Лb2 Лa6 36. Лb5 b6 37. Лb2 Фf6 38. Фd2 g5! 39. Лb1 gf 40. gf Фh4 41. h3 Лa3! 42. Фf2 (последняя ловушка — 42...Ф:f4 43. Сh5+) 42...Ф:f2+ 43. Кр:f2 Кd3+ 44. Крg3 Крf6 45. h4 Лc3 46. Лa1 Лb3 47. Лf1 e5 48. fe+ К:e5 49. Крf4 Л:f3+ 50. Л:f3 К:f3. Белые сдались.

Е. Гик

Цена 1 р. 10 к.

Индекс 70465

Английское слово «fold» означает «складывать». В последние годы весьма популярными стали так называемые «folding puzzles» — складные головоломки из плоских листочков бумаги или пластмассы. За рубежом их можно встретить в офисе и на пароходе, на стадионе, пляже и в ресторане, словом, везде, где у человека появляется несколько минут свободного времени.

На нашей обложке показана одна из этих головоломок. На картинках изображены ее лицевая и оборотная стороны. Вы можете перерисовать головоломку на лист бумаги или вырезать ее из журнала. В последнем случае нижний рисунок разрежьте на части по линиям сгиба и приклейте отдельные кусочки на оборотную сторону верхнего рисунка.

А теперь попробуйте сложить:

— треугольник, желтый с обеих сторон;

— треугольник, розовый с обеих сторон;

— двухцветный треугольник, лицевая и оборотная стороны которого показаны внизу на двух последних рисунках.

Если вам самим удастся придумать подобные головоломки, присылайте их к нам в редакцию.

А. К.